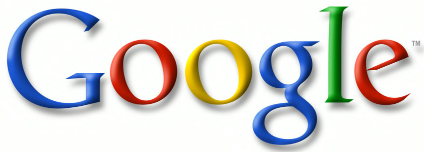



ALPHONSE
PICARD & FILS
EDITEURS
RUE BONAPARTE
82
PARIS VI ARROND
LIBRAIRIE
ANCIENNE
D'OCCASION
COMMISSION
LIVRES NEUFS
FRANÇAIS
&
ETRANGERS

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

Édouard A.-FOUËT,

PROFESSEUR A L'INSTITUT CATHOLIQUE DE PARIS.

SECONDE PARTIE.

THÉORÈMES D'EXISTENCE. — ÉTUDE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU POINT DE VUE DE CAUCHY, DE WEIERSTRASS, DE RIEMANN.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1904

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
33963 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

Édouard A.-FOUËT,

PROFESSEUR A L'INSTITUT CATHOLIQUE DE PARIS.

SECONDE PARTIE.

THÉORÈMES D'EXISTENCE. — ÉTUDE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU POINT DE VUE DE CAUCHY, DE WEIERSTRASS, DE RIEMANN.



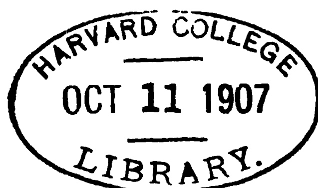
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904


HARVARD COLLEGE
OCT 11 1907
LIBRARY.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
34824 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

Édouard A.-FOUËT,

PROFESSEUR A L'INSTITUT CATHOLIQUE DE PARIS.

PREMIÈRE PARTIE.

FONCTIONS EN GÉNÉRAL. FONCTIONS ANALYTIQUES : LEURS MODES DE DÉFINITION ET DE REPRÉSENTATION.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902



PRÉFACE.

Dans le domaine mathématique, les diverses disciplines tendent sans cesse à se compénétrer. Plus une théorie se développe, et plus nombreux sont les points de contact, les relations, les analogies que l'on découvre entre elle et des branches qui, jusque-là, lui semblaient étrangères. Ainsi, les progrès de la Science mathématique, loin de lui faire perdre son caractère d'unité, resserrent les liens entre ses diverses parties. C'est là un fait capital, qui s'est affirmé surtout au cours du dernier siècle, et qui, sans doute, aidera désormais à réaliser de nouvelles découvertes.

Mais, en même temps, la Science dont nous parlons gagne chaque jour en étendue comme en profondeur. Que le monde de la nature contraigne le géomètre à se poser certains problèmes, ou qu'ils naissent de ses libres conceptions, ils surgissent de tous côtés : chaque question résolue en provoque cent autres, qui, à leur tour, sont l'occasion de nouvelles recherches. La floraison est telle que l'on se demande si une même intelligence pourra longtemps encore embrasser sérieusement, même sans les approfondir, toutes les parties

d'un domaine si vaste, bien que chaque progrès effectif soit accompagné d'ordinaire de la découverte de procédés plus rigoureux et de méthodes plus simples.

Dès lors, si l'étudiant comprend que l'unité de la Science mathématique lui défend de s'enfermer trop tôt dans des recherches spéciales, auxquelles fatalement, un jour, il devra se livrer, s'il lui faut acquérir d'abord des vues d'ensemble, il sent aussi qu'il est imprudent de s'attarder en chemin : il y a des étapes qu'il doit rapidement enlever.

A ce titre, on peut regarder comme de quelque utilité les Ouvrages didactiques qui préparent la lecture de nos grands traités d'Analyse et des Mémoires originaux, en groupant les matières éparses dans de nombreux Volumes, en les résumant, en les simplifiant, en les isolant de questions plus complexes.

Celui-ci est consacré à l'étude des fonctions analytiques. Cette théorie est sans conteste l'une des découvertes les plus brillantes du XIXe siècle. En germe dans les écrits de Gauss, créée par Cauchy, Weierstrass, Riemann, elle est devenue entre leurs mains, et celles de leurs continuateurs, un merveilleux instrument : elle a ouvert à l'Analyse des voies toutes nouvelles, et elle semble lui promettre encore, dans un prochain avenir, de magnifiques conquêtes.

Souvent, elle a permis de résoudre des problèmes difficiles par des méthodes très simples; mais parfois l'on s'y heurte à des questions délicates. Aussi, pour laisser à cet Ouvrage son caractère élémentaire, et néanmoins ne pas tromper le lecteur sur la complexité des questions qu'il touche, il a paru bon de réserver pour le texte les propositions les plus simples, et de renvoyer les autres à des *notes*. Dans ces

notes, nombreuses et denses, sont signalées les difficultés que les problèmes soulèvent ou les généralisations intéressantes; on y trouvera parfois une orientation vers leur solution, toujours des renseignements bibliographiques permettant de recourir aux sources : ainsi elles serviront de guide et de répertoire élémentaire pour les recherches.

Il a également paru bon, pour rendre aux débutants la lecture plus aisée, de rédiger les premiers Chapitres de telle façon qu'il soit possible, sans grand inconvénient, d'intervertir l'ordre dans lequel ils sont placés. Plusieurs paragraphes s'y présentent même comme de brèves monographies, qui pourraient être détachées du texte.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

SECTION I.

LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.

§ I. — *Préliminaires.*

§ II. — *Aperçu de la théorie des ensembles.*

§ III. — *Types de fonctions.*

SECTION II.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

§ I. — *Fonctions continues.*

§ II. — *Fonctions ayant une dérivée déterminée.*

§ III. — *Fonctions analytiques uniformes.*

LIVRE I.

MÉTHODES GÉNÉRALES DE DÉFINITION ET DE REPRÉSENTATION DES FONCTIONS.

CHAPITRE I.

Fonctions algébriques.

§ I. — *Fonctions uniformes.*

§ II. — *Fonctions multiformes particulières.*

CHAPITRE II.

Fonctions définies par des séries simples.

SECTION I.

§ I. — *Séries en général.*

§ X. — *Séries hypergéométriques.*

CHAPITRE III.

Fonctions définies par des séries multiples.

SECTION I.

§ I. — *Séries multiples en général.*

§ II. — *Séries entières à plusieurs variables.*

§ III. — *Produits infinis multiples.*

SECTION II.

APPLICATION AUX TRANSCENDANTES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

CHAPITRE IV.

Fonctions définies par des intégrales.

CHAPITRE V.

Le prolongement analytique d'après Weierstrass.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA SECONDE PARTIE.

LIVRE I (*suite*).

CHAPITRE VI.

Fonctions définies par des équations différentielles.

CHAPITRE VII.

Fonctions définies par des propriétés fonctionnelles.

LIVRE II.

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU POINT DE VUE DE CAUCHY, DE WEIERSTRASS, DE RIEMANN.

CHAPITRE VIII.

Théorie des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy.

§ I. — *Séries de Taylor; fonctions entières. Prolongement analytique.*

§ II. — *Séries de Laurent et de Mittag-Leffler. Applications.*

§ III. — *Série de Lagrange.*

§ IV. — *Extension de la notion de résidu.*

§ V. — *Application à l'évaluation des intégrales définies.*

§ VI. — *Application à l'intégration des équations différentielles.*

§ VII. — *Fonctions analytiques de plusieurs variables.*

CHAPITRE IX.

Théorie des fonctions analytiques au point de vue de Weierstrass.

§ I. — *Fonctions entières : représentation, propriétés.*

§ II. — *Décomposition des fonctions entières en facteurs primaires.*

§ III. — *Exemples.*

§ IV. — *Fonctions méromorphes : représentations, propriétés.*

§ V. — *Fonctions analytiques uniformes dont les singularités sont dénombrables : représentation.*

§ VI. — *Fonctions analytiques de plusieurs variables.*

CHAPITRE X.

Théorie des fonctions analytiques au point de vue de Riemann.

§ IV. — *Les fonctions analytiques et les surfaces minima.*

§ V. — *Les fonctions analytiques, la Mécanique et la Physique.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA SECONDE PARTIE.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Ce que nous avons dit jusqu'ici de la définition et de la représentation des fonctions analytiques laisse de côté cette question pratique fondamentale : quel rôle jouent-elles dans la solution des problèmes? Sans doute, nous savons déjà que les opérations élémentaires du calcul, effectuées un nombre fini de fois sur des fonctions analytiques (Ire Partie, p. 225), ainsi que l'intégration et la différentiation de ces fonctions, conduisent à de nouvelles fonctions analytiques. Mais, pour montrer que la théorie de Weierstrass est vraiment féconde, il faut établir l'*existence des fonctions analytiques* définies par des équations différentielles : ce problème est du reste, en lui-même, d'un intérêt capital.

Considérons p relations, dont nous spécifierons plus loin la forme, entre n variables indépendantes, p fonctions et les dérivées de ces fonctions jusqu'à celles d'un ordre déterminé : nous allons prouver qu'il existe un système de fonctions analytiques vérifiant ces équations et satisfaisant à certaines conditions dites *conditions initiales* (par analogie avec une dénomination usitée en Mécanique) ou *conditions aux limites*.

C'est à Cauchy que l'on doit les premiers résultats précis relatifs à ces théorèmes d'existence. Ses procédés varient avec les

hypothèses faites sur les éléments qui entrent dans les relations données. Quand ils sont analytiques, il emploie la méthode appelée *Calcul des limites* (1) : dans ce calcul, après avoir formé des séries de puissances qui satisfont *formellement* aux équations données, *on établit leur convergence* (2) en *comparant* ces

(1) Cauchy exposa les principes de ce *Calcul* dans un Mémoire lu à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 (lithographié en 1832, reproduit dans les *Exercices d'Analyse et de Physique*, t. II, p. 50, édit. de 1841).

« Ce calcul des limites, dit Cauchy, sert non seulement à fournir des règles relatives à la convergence des séries qui représentent le développement des fonctions explicites ou implicites d'une ou plusieurs variables, mais encore à fixer des *limites* supérieures aux erreurs que l'on commet, quand on arrête chaque série après un certain nombre de termes » (Mémoire ci-dessus, p. 41). Cette *limitation* des erreurs résulte des théorèmes établis précédemment (Ire Partie, p. 219 et 281).

(2) Les anciens analystes, en présence d'équations dont l'intégration n'était pas réductible aux quadratures, employaient déjà la méthode des coefficients indéterminés : ils remplaçaient dans l'équation donnée la fonction inconnue par une série entière, dont ils cherchaient les coefficients par récurrence (lorsque ces calculs laissaient indéterminés certains paramètres, on les regardait comme les constantes de l'intégration). *Mais ils négligeaient la question de la convergence de la série formée.* Si, malgré cette omission, des mathématiciens de génie, comme Euler et Lagrange, ont évité de graves erreurs, grâce à la sûreté de leur intuition, il est évident que, par lui-même, le procédé manque de rigueur.

« ... D'une part, rien ne prouvait que la série obtenue fût convergente, et l'on sait que les séries divergentes n'ont pas de somme; d'autre part, une série, même convergente, qui provient du développement d'une fonction effectué à l'aide de la formule de Mac-Laurin, ne représente pas toujours la fonction dont il s'agit. » (*Voir* Ire Partie, p. 290, note.) « L'intégration par série était donc illusoire tant qu'on ne fournissait aucun moyen de s'assurer que les séries obtenues étaient convergentes, et que leurs sommes étaient des fonctions propres à vérifier les équations proposées. » [Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique*, t. I, p. 327 (édit. de 1840). *Cf.* aussi t. II, p. 43 (édit. de 1841).]

La preuve de la *convergence des séries intégrales* par la méthode des limites a été exposée avec détails d'abord par Cauchy dans le Mémoire ci-dessus, lithographié à Prague, en 1835, imprimé en 1840 (*cf.* la page 335 du Mémoire), puis par Weierstrass dans un manuscrit daté de 1842 (*voir* plus bas).

Les premiers, Briot et Bouquet montrèrent qu'il est possible, pour certaines équations différentielles, de former une série de Taylor *toujours divergente* vérifiant l'équation, dont les coefficients s'obtiennent en tirant de l'équation proposée les valeurs des dérivées de la fonction pour une valeur particulière de la variable. Ils donnèrent comme exemple l'équation $x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by$.

Ces développements, purement *formels*, sont nombreux en Mécanique analytique et en Mécanique céleste : nous avons signalé des travaux qui tendent à l'utilisation de ces solutions (Ire Partie, p. 166 et 329).

séries à des séries auxiliaires dont on a prouvé directement l'existence. Ce qui rend cette comparaison possible c'est que les modules des dérivées partielles des fonctions analytiques, qui figurent dans les équations proposées, sont *limités* supérieurement.

§ I. — Fonctions implicites.

192. Dans ce paragraphe, on suppose que les dérivées des fonctions inconnues n'entrent pas dans les équations qui définissent ces fonctions [1].

Prenons d'abord le cas d'une seule fonction et d'une seule variable indépendante. Soit $F(x, y) = 0$ la relation donnée; son premier membre, holomorphe dans le champ double formé de deux cercles C et Γ, ayant pour centres x_0 et y_0, pour rayons r et ρ, est nul au point (x_0, y_0); on suppose $F'_y \gtrless 0$ en ce point.

Théorème. — *L'équation considérée a une racine y et une seule qui est holomorphe au point x_0 et tend vers y_0 quand x tend vers x_0.*

Première démonstration (Weierstrass). — Ramenons à l'origine le point (x_0, y_0). La série entière qui représente à l'origine la fonction régulière donnée n'a plus de terme indépendant; le

---

(1) L'*existence* des fonctions implicites est un *corollaire* des théorèmes de Cauchy sur l'existence des intégrales des équations différentielles. *Cf.* Cauchy, *C. R.*, 1839, 2e semestre, p. 587. — Briot et Bouquet, *J. E. P.*, 1856, XXXVIe Cahier; *Fonctions elliptiques*, 2e édit., p. 336. — Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 18. — Poincaré, *Méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 68.

Mais il vaut mieux l'établir *directement*. *Cf.* Jordan, *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 178. — Méray, *Leçons, etc.*, t. I, p. 275. — Picard, *Analyse*, t. II, p. 246. — Demartres, *Analyse*, t. II, p. 135; t. III, p. 3. — Lindelöf, *B. D.*, 1899, p. 68. — Goursat, *Analyse*, t. I, p. 447.

Voir aussi quelques autres théorèmes sur les fonctions implicites, établis par M. Painlevé (*A. T.*, 1888, B., p. 29).

Remarquons que l'on passe des théorèmes d'existence des fonctions implicites, dans le cas des *variables réelles*, à ceux que nous démontrons ici (nos 192, 195, 196) en remplaçant ces mots : *fonction continue et ayant des dérivées continues* par ces mots : *fonction analytique;* les autres hypothèses et les autres résultats sont les mêmes. Pour le cas de l'inversion, *voir* la note Ire Partie, p. 264.

terme en y a un coefficient différent de zéro en vertu de l'hypothèse sur la dérivée première. L'équation $F = 0$ peut donc s'écrire

$$(1) \quad \begin{cases} y = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy \\ \qquad + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \ldots + a_{mn}x^m y^n + \ldots = f(x, y). \end{cases}$$

I. *Cette équation est vérifiée par une série entière convergente à l'origine*

$$(\alpha) \qquad y = \mathfrak{P}(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p + \ldots \qquad (\alpha_0 = 0).$$

En effet, supposons qu'il existe une pareille série satisfaisant à l'équation (1) : elle en rendra identiques les deux membres ; par suite, ses coefficients se déduiront de l'identité

$$\mathfrak{P}(x) = a_{10}x + \sum_{mn} a_{mn} x^m \overline{\mathfrak{P}(x)}^n,$$

qui donne (Ire Partie, p. 244)

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = a_{10}, \\ \alpha_2 = a_{20} + a_{11}\alpha_1 + a_{02}\alpha_1^2, \\ \alpha_3 = a_{30} + a_{11}\alpha_2 + 2a_{02}\alpha_1\alpha_2 + a_{21}\alpha_1 + a_{12}\alpha_1^2 + a_{03}\alpha_1^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces égalités montrent que chaque nouveau coefficient α_p est une fonction entière et à *coefficients positifs* de coefficients α_q déjà calculés et des coefficients donnés $a_{ik} (q < p;\ i + k \leqq p)$. On peut donc calculer de proche en proche les coefficients d'une série (α) satisfaisant *formellement* à l'équation (1) : *il reste à en démontrer la convergence*.

Pour y parvenir, transformons l'équation (1) en substituant à la série $f(x, y)$ une série majorante $\varphi(x, y)$, que nous pouvons définir par l'égalité (Ire Partie, p. 216)

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} - M - M\frac{y}{\rho} = b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + \ldots$$
$$(b_{mn} \geqq |a_{mn}|)$$

en désignant par M une limite supérieure des termes de la série f

dans le champ (C, Γ), et considérons l'équation

$$(1') \qquad Y = \varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho}.$$

Si elle a une racine holomorphe à l'origine

$$(\beta) \qquad Y = \beta_1 x + \ldots + \beta_p x^p + \ldots \qquad (\beta_0 = 0),$$

cette série (β) est *majorante* par rapport à (α) [et, par suite, la série (α) est aussi convergente].

En effet, si la série (β) existe, on en peut obtenir les coefficients en répétant les calculs qui ont fourni ceux de la série (α) : il suffit de remplacer dans les égalités (2) les a_{ik} et α_p par b_{ik} et β_p. Dès lors, en vertu des inégalités $b_{mn} \overline{\gtrless} |a_{mn}|$, la forme des relations (2) montre que la série (β) est majorante relativement à la série (α).

Or l'équation auxiliaire (1′) a bien une racine régulière à l'origine et nulle avec x. En effet, elle peut s'écrire

$$(1'') \qquad Y^2 - \frac{\rho^2}{\rho + M}Y + \frac{\rho^2}{\rho^2 + M}\,\frac{M\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}} = 0,$$

ce qui donne pour la racine tendant vers zéro avec x

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} - \sqrt{\frac{\rho^4}{4(\rho + M)^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 + M}\,\frac{M\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}}}.$$

La quantité sous le radical s'annule pour

$$x = r\left(\frac{\rho}{\rho + 2M}\right)^2 = r_0 \qquad (r_0 < r).$$

La racine Y est donc développable en série entière dans tout cercle C′ dont le rayon n'atteint pas r_0; la série entière ainsi obtenue ne peut qu'être identique à la série (β) (Ire Partie, p. 141 ou 291). La série (β) est donc convergente dans les cercles C′, et dès lors la convergence de la série (α) est assurée *au moins* dans ces cercles.

II. *La série $\mathfrak{P}(x)$ est la seule racine qui s'annule avec x.*

En effet, posons $y = \mathfrak{P}(x) + y_1$. La fonction $y - f(x,y)$ s'annule, quel que soit x, quand y_1 est nul; on peut donc écrire

$$y - f(x,y) = y_1 f_1(x, y_1),$$

f_1 désignant une nouvelle série entière. La série $y - f$ commençait par le terme y; par suite, il y aura dans la série f_1 un terme constant égal à l'unité, ce qui donne, en revenant aux variables x et y,

$$y - f(x,y) = [y - \mathfrak{P}(x)] f_2(x,y) \qquad (f_2 = 1 + c_{10} x + c_{01} y + \ldots).$$

Dès lors $\mathfrak{P}(x)$ est bien la seule racine nulle avec x, puisque $f_2(x,y)$ ne tend pas vers zéro avec x et y [1].

193. *Seconde démonstration.* — Procédons comme pour les fonctions algébriques (Ire Partie, p. 87), et prouvons d'abord la *continuité des racines* de l'équation $F(x,y) = 0$.

Soit (x_0, y_0) un de ses systèmes de solutions : ramenons-le à l'origine, puis développons suivant les puissances de y la fonction Φ transformée de F; on a ainsi

$$\Phi(x,y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) y + \ldots + \varphi_n(x) y^n + \ldots.$$

Si l'équation $\Phi(x,y) = 0$ a une racine nulle d'ordre p pour $x = 0$ (Ire Partie, p. 58), c'est-à-dire si les fonctions holomorphes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ s'annulent avec x, $\varphi_p(0)$ n'étant pas nul [2], *cette équation a, dans le voisinage de $x = 0$, p racines voisines de zéro et pas davantage* [3].

En effet, le raisonnement déjà fait (Ire Partie, p. 88) est encore

---

(1) Cette décomposition en produit de facteurs et celles que nous rencontrerons plus loin sont dues à Weierstrass : un théorème général sera établi au n° 299. Remarquons aussi une fois pour toutes que, par les procédés de comparaison ci-dessus, on établit la convergence *absolue et uniforme* des séries (α).

(2) On voit que toute racine de l'équation obtenue en égalant à zéro une fonction holomorphe de deux variables est d'un degré de multiplicité *entier et fini.*

(3) Le raisonnement donné pour les fonctions algébriques montre que les p racines, nulles à l'origine, forment un ou plusieurs systèmes circulaires. Si, parmi ces p racines, q se permutent entre elles, on peut représenter ces q racines par un même développement (Ire Partie, p. 294).

applicable, bien que le polynome P soit ici remplacé par une série entière en y, puisque les modules des coefficients φ_p, φ_{p+1}, ... sont limités supérieurement dans le cercle C (Ire Partie, p. 219 ou 297).

Ce lemme établi, revenons au théorème, et reprenons l'hypothèse $(F'_y)_{x_0 y_0} \gtrless 0$.

L'équation $F(x, y) = 0$ définit, dans le voisinage de x_0, une fonction y *uniforme et continue,* qui prend en x_0 la valeur y_0 (*voir* Ire Partie, p. 90).

Cette fonction *a une dérivée* (Ire Partie, p. 91).

Cette fonction *est unique* (on peut le prouver comme ci-dessus).

194. On peut faire intervenir plus directement les procédés de Cauchy dans la démonstration de ces théorèmes. Comme exemple, reprenons le théorème de l'inversion, et montrons qu'à une fonction $y = f(x)$, holomorphe en un point x_0, *et dont la dérivée première n'est pas nulle en ce point,* correspond par inversion une fonction $x = \varphi(y)$ holomorphe au point y_0 (y_0 est la valeur de f en x_0).

En effet, supposons x_0 et y_0 nuls. Dans le plan x on peut décrire, de l'origine, une circonférence C assez petite pour qu'à son intérieur la fonction $f(x)$ s'annule seulement au point $x = 0$ (Ire Partie, p. 140). Soit m le minimum de $|f(x)|$ sur C, et y_1 un nombre arbitraire de module inférieur à m. Les équations $f(x) = 0$, $f(x) = y_1$ ont le même nombre de racines à l'intérieur de C (Ire Partie, p. 288); dès lors, à l'intérieur de C, la fonction $f(x)$ prend une seule fois la valeur y_1.

A la circonférence C du plan x, la relation $y = f(x)$ fait correspondre une courbe Γ du plan y entourant l'origine; à l'intérieur de Γ, il y a un cercle ayant l'origine pour centre, où x est une fonction uniforme de y, car à tout point y du domaine $|y| < m$ correspond un seul point x intérieur à C. De plus, $f'(x)$ ayant une valeur déterminée, continue et *différente de zéro* au point $x = 0$, son inverse $\varphi'(y)$ est déterminé et continu au point $y = 0$. On en conclut que $\varphi(y)$ est holomorphe à l'origine.

Corollaire. — Lorsque, à un domaine simplement connexe $\mathcal{D}_x$, correspond, par la transformation $y = f(x)$, un domaine simplement connexe $\mathcal{D}_y$, $f(x)$ désignant une fonction analytique uniforme dans le domaine $\mathcal{D}_x$ *dont la dérivée est différente de zéro*, la fonction inverse $x = \varphi(y)$ est analytique et uniforme dans le domaine $\mathcal{D}_y$ [1].

On le déduit aisément de la définition de fonction analytique par une suite de séries enchaînées.

195. Supposons, maintenant, qu'il y ait n variables indépendantes : soit $F(x_1, \ldots, x_n; y) = 0$ une relation dont le premier membre est holomorphe dans un champ multiple (renfermant $n+1$ plans) contenant le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ et s'annule en ce point; F'_y n'est pas nul en ce point [2].

En raisonnant comme ci-dessus on démontre qu'il existe une fonction y, régulière dans le voisinage du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, qui satisfait à l'équation donnée et prend en ce point la valeur y^0. Cette fonction est unique et elle admet dans son domaine d'existence des dérivées partielles définies par les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

De plus, ramenons à l'origine le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$. Le développement de $F(0, \ldots, 0; y)$ suivant les puissances de y commencera par un terme en y, et l'on aura comme à la page 6

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = [y - \mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_n)]\, \Phi(x_1, \ldots, x_n, y),$$

$\mathfrak{P}$ représente une série entière nulle à l'origine; la fonction holomorphe Φ ne s'annule plus avec $x_1, \ldots, x_n, y$.

196. Étudions le cas général. Soient n variables indépen-

(1) La correspondance entre les deux domaines est biunivoque et conforme (Ire Partie, p. 53).

(2) La fonction y, lorsqu'elle n'entre qu'à des puissances *finies* dans F, est dite *algébroïde* en $x_1, \ldots, x_n$. Dans sa thèse (1879), M. Poincaré a signalé d'intéressantes propriétés de ces fonctions; par exemple, si F est holomorphe en $x_1, \ldots, x_n, y$ et s'annule avec ces variables, on peut exprimer $x_1, \ldots, x_n, y$ par des fonctions algébroïdes de n variables auxiliaires $\xi_1, \ldots, \xi_n$ s'annulant avec ces variables (p. 16).

dantes x_i, p fonctions y_k de ces variables, p relations

$$(3) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p);$$

les fonctions F_k s'annulent au point $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_p^0)$, que nous désignerons par (x^0, y^0) et sont holomorphes dans un champ multiple (comprenant $n + p$ plans), renfermant ce point à son intérieur : au même point, *le déterminant fonctionnel* J *des fonctions* F *par rapport aux fonctions y est différent de zéro* (1).

Théorème. — *Les relations données définissent un système de p fonctions*

$$y_l = \mathfrak{P}_l(x_1, \ldots, x_n) \qquad (l = 1, \ldots, p),$$

holomorphes dans le domaine formé par n cercles ayant leurs centres au point x^0, et prenant en ce point les valeurs y^0 (2).

Cette proposition s'établit directement par les procédés de Weierstrass en suivant une méthode toute semblable à celle que nous venons de développer (p. 4; *voir* aussi n° 201).

Voici comment M. Picard la déduit de la décomposition en facteurs obtenue à la fin du numéro précédent.

Ramenons à l'origine le point (x^0, y^0). Le théorème est vrai pour $p = 1$; montrons que, s'il est établi pour $p - 1$ fonctions de n variables, on peut l'étendre à p fonctions.

Le jacobien J ne s'annulant pas avec les x et les y, c'est que, au point (0, 0), l'une au moins des dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial y_k}$, par exemple $\frac{\partial F_1}{\partial y_p}$, est différente de zéro. Regardons les x et les y sauf y_p comme des variables indépendantes. La première des équations (3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \\ &\quad = [y_p - \mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{p-1})]\, \Phi_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = 0, \end{aligned}$$

$\mathfrak{P}$ désignant une série entière, et Φ_1 une fonction qui ne s'annule

(1) Nous supposons p fini. M. Helge von Koch a traité le cas où il y a une infinité d'équations simultanées (*B. S. M.*, 1899, p. 215).

(2) M. Poincaré a montré que les n variables et les p fonctions peuvent s'exprimer par des fonctions algébroïdes de n nouvelles variables (Thèse, p. 18).

plus à l'origine. Par suite, pour la question qui nous occupe, on peut substituer à l'équation $F_1 = 0$ la relation plus simple

$$y_p = \varphi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{p-1}).$$

Le déterminant J_1 du nouveau système d'équations

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial y_{p-1}} & -1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{p-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial y_{p-1}} & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, comme le déterminant J, dans le voisinage de l'origine.

Remplaçons y_p dans les $p - 1$ dernières équations (3) par φ. Au système des p équations (3) on substitue ainsi un système dans lequel $p - 1$ équations ne renferment plus que $p - 1$ fonctions : dès lors, le théorème sera établi si nous montrons que le déterminant J_2 correspondant à ces $p - 1$ équations n'est pas nul. Chaque ligne de J_2 est de la forme

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_1} + \frac{\partial F_k}{\partial y_p}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F_k}{\partial y_{p-1}} + \frac{\partial F_k}{\partial y_p}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{p-1}} \qquad (k = 2, \ldots, p).$$

Par suite, en vertu des propriétés des déterminants, J_2 est égal, au signe près, à J_1 et, dès lors, est lui aussi différent de zéro [1].

197. Qu'arrive-t-il lorsque le jacobïen J est nul [2]?

Supposons d'abord qu'*il s'annule identiquement* dans un

---

[1] L'équation algébrique $F(x) = 0$ admet la racine x_0 comme *racine simple*, lorsque $F(x)$ s'annule pour cette valeur sans que $F'(x_0)$ soit nul.

Le système d'équations algébriques $F_1(x, y) = 0$, $F_2(x, y) = 0$ admet comme *système simple* le système de solutions (x_0, y_0), lorsque F_1 et F_2 s'annulent pour ces valeurs, sans que leur jacobien soit nul.

Par analogie, on dira que le système (3) admet, pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, les solutions $y_1 = \ldots = y_p = 0$ comme *système simple* lorsque les équations (3) sont vérifiées pour ces valeurs, sans que le jacobien soit nul.

[2] Cette question a fait l'objet de nombreuses recherches, au premier rang desquelles il faut citer les travaux de Puiseux sur les racines des équations algébriques. *Cf.* aussi la Thèse de M. Poincaré.

domaine renfermant le point (x^0, y^0). Alors, en général, à un point x voisin du point x^0 ne correspond pas de point y voisin du point y^0; quand certaines conditions sont satisfaites, le système (3) admet encore des solutions, mais les fonctions y ne sont jamais uniformes.

En particulier, soit le système

$$(4) \qquad x_i = f_i(y_1, \ldots, y_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

lorsque son jacobien est nul identiquement, l'inversion du système est impossible, et il existe une ou plusieurs relations entre les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ (¹).

198. Supposons maintenant que le jacobien soit nul, *seulement dans le voisinage de certains points.*

(¹) Rappelons la démonstration de ce théorème.

On sait que, si le jacobien est nul, on peut déterminer p fonctions $Y_1, \ldots, Y_p$ des variables $y_1, \ldots, y_p$ non nulles simultanément, telles que l'on ait

$$Y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \ldots + Y_p \frac{\partial x_p}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Multiplions ces relations respectivement par $dx_1, \ldots, dx_p$; en les ajoutant, il vient

$$(5) \qquad Y_1\, dx_1 + \ldots + Y_p\, dx_p = 0.$$

Dès lors, il y a une relation entre $x_1, \ldots, x_p$; car, si ces fonctions étaient indépendantes, on pourrait les prendre comme variables arbitraires à la place de $y_1, \ldots, y_p$; par suite, leurs différentielles totales $dx_1, \ldots, dx_p$ seraient arbitraires, indépendantes entre elles, et indépendantes des valeurs de $y_1, \ldots, y_p$, $x_1, \ldots, x_p$, ce qui est en contradiction avec la relation (5).

La réciproque est vraie : lorsqu'il existe entre p fonctions de p variables une relation identique $\varphi(f_1, \ldots, f_p) = 0$, le jacobien de ces fonctions est nul. On le démontre en différentiant la relation $\varphi = 0$ successivement par rapport à chaque variable.

Même démonstration pour ce théorème plus général :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une relation entre p fonctions x_k de n variables y_i $(n > p)$, c'est que les déterminants d'ordre p formés avec p colonnes du Tableau

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_k}{\partial y_p} \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

soient nuls identiquement.

La résolution du système (4) peut alors conduire à des fonctions multiformes non analytiques au point considéré. Étudions seulement, dans quelques cas simples, les systèmes de solutions des équations

$$F(x, y) = 0, \qquad F'_y(x, y) = 0$$

(nous supposons ramenée à l'origine la solution commune à étudier).

Premier cas. — *L'autre dérivée partielle n'est pas nulle à l'origine.*

L'équation donnée $F = 0$ peut alors se mettre sous la forme

$$x = a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{20}x^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots.$$

Si l'on regarde y comme la variable indépendante, cette relation définit une fonction x régulière à l'origine (p. 3), qui a pour développement

$$x = \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \ldots + \alpha_p y^p + \ldots \qquad (\alpha_2 = a_{02}).$$

Quelques-uns des coefficients α_2, α_3, ... peuvent être nuls; soit α_p le premier coefficient différent de zéro. Posons $x = x'^p$, ce qui donne

$$x' = y\sqrt[p]{\alpha_p + \alpha_{p+1}y + \ldots} = y(\sqrt[p]{\alpha_p} + \beta_1 y + \ldots),$$

puisque chaque détermination du radical est régulière à l'origine. Inversement (p. 7), y est une fonction holomorphe de x' et l'on a

$$y = \frac{1}{\sqrt[p]{\alpha_p}}x' + \gamma_2 x'^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt[p]{\alpha_p}}x^{\frac{1}{p}} + \gamma_2 x^{\frac{2}{p}} + \ldots.$$

La fonction y a p valeurs qui se permutent autour l'origine.

Second cas. — *A l'origine,* F'_x est nul; F''_{x^2}, F''_{y^2}, $F''_{xy} - 4F''_{x^2}F''_{y^2}$ sont différents de zéro.

La relation $F = 0$ peut alors être mise sous la forme

$$(y - \alpha x)(y - \beta x) + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots = 0 \qquad (\alpha \gtrless \beta),$$

φ_3, φ_4, ... étant des polynomes homogènes dont le degré est égal à l'indice. Faisons la transformation $y = x(\beta + y_1)$. Par la sup-

pression du facteur x^2, l'équation devient

$$y_1(\beta - \alpha + y_1) + x\psi(x, y_1) = 0.$$

Aux deux valeurs de y qui s'annulaient avec x correspondent deux valeurs de y_1 *différentes* entre elles. On peut donc les développer suivant les puissances de x; celle qui n'est pas nulle a pour expression

$$y_1 = \alpha - \beta + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

et, par suite, on a

$$y = \alpha x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \ldots = \mathfrak{P}(x).$$

En permutant les rôles de α et de β, on obtient de même pour l'autre racine y qui s'annule avec x une expression de la forme

$$y = \beta x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \ldots = \mathfrak{Q}(x).$$

Ainsi les deux racines y qui tendent vers zéro avec x sont holomorphes dans le voisinage de l'origine.

Pour démontrer que l'équation $F = 0$ n'a pas d'autre racine tendant vers zéro avec x, remplaçons y par $\mathfrak{P}(x) + y_1$. La fonction F renfermera le facteur y_1; d'où, en revenant aux variables x et y, on a

$$F(x, y) = [y - \mathfrak{P}(x)]\, F_1(x, y).$$

La transformation $y = \mathfrak{Q}(x) + y_2$ montre que l'un de ces facteurs doit s'annuler avec y_2 : c'est le facteur F_1. D'où, finalement,

$$F(x, y) = [y - \mathfrak{P}(x)]\,[y - \mathfrak{Q}(x)]\, F_2(x, y),$$

F_2 représentant une fonction holomorphe dont le développement commence par l'*unité* (1).

On pourrait poursuivre le parallèle entre les fonctions algébriques et les fonctions définies par des relations holomorphes (2).

---

(1) Dans le cas général, les racines multiples y, qui correspondent à une valeur finie x_0 de x, ou bien sont holomorphes, ou bien appartiennent à des systèmes circulaires de racines s'échangeant autour du point x_0, systèmes qui peuvent être en nombre infini.

(2) L'analogie cesse lorsque x ou y devient infini. En un point x, auquel correspond une valeur infinie y, la substitution (y, y^{-1}) transforme la fonction $F(x, y)$ en une fonction qui n'est pas holomorphe dans le voisinage de $y = 0$. Même conclusion lorsqu'on ramène à l'origine le point $x = \infty$.

§ II. — Équations différentielles.

199. Considérons un système différentiel du premier ordre que nous supposerons mis sous la forme canonique ([1])

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

les coefficients différentiels f_i satisfaisant à certaines conditions.

Un problème fondamental consiste à rechercher s'il existe un système d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$, et un système *unique*, vérifiant certaines conditions et prenant des valeurs arbitraires $b_1, \ldots, b_n$ en un point arbitraire a. Dans de nombreuses Notes insérées aux *Comptes rendus*, surtout entre 1840 et 1846, Cauchy en a donné diverses solutions; on peut ranger les plus importantes sous les titres suivants :

Méthode du Calcul des limites ou de Cauchy-Weierstrass ([2]).

Méthode des quadratures ou de Cauchy-Lipschitz ([3]).

([1]) Une des méthodes classiques d'*élimination*, par exemple celle de Sylvester, ramène le système le plus général de deux équations différentielles du premier ordre

$$F_1(y'_1, y'_2, y_1, y_2, x) = 0, \qquad F_2(y'_1, y'_2, y_1, y_2, x) = 0,$$

où F_1 et F_2 sont des polynomes en y'_1 et y'_2, à la forme

$$(\varphi) \qquad \varphi_1(y'_2, y_1, y_2, x) = 0, \qquad y'_1 = \varphi_2(y'_2, y_1, y_2, x) = 0,$$

où φ_1 est un polynome en y'_2, et φ_2 est fractionnaire en y'_2 : ce nouveau système peut être considéré comme le plus général (résultats analogues pour n équations). Pour ramener le système (φ) à la forme (E), il reste à examiner dans quels cas l'équation $\varphi_1 = 0$ peut être résolue par rapport à y'_2 (p. 3, 10, etc.).

([2]) Le Mémoire de Cauchy, avons-nous dit, fut lithographié en 1835; le manuscrit de Weierstrass, daté de 1842, fut publié en 1894 (*Œuvres*, t. I, p. 75).

([3]) Dans cette méthode, on regarde les équations différentielles comme *limites d'équations aux différences*. Enseignée par Cauchy dès 1820 (*cf.* Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. I, p. 327, édit. de 1840. — Moigno, *Leçons sur le Calcul différentiel et intégral d'après Cauchy*, t. II, Leçons 26, 27, 28, 33. — Coriolis, *J. M.*, 1837, p. 230), elle a été retrouvée par M. Lipschitz (*B. D.*, 1876, p. 149).

Son emploi n'exige pas que les f_i soient définies pour les valeurs *complexes* des variables. Pour qu'elle soit applicable (variables *réelles*) dans le voisinage de conditions initiales $(a, b_1, \ldots, b_n)$, *il suffit* que dans ce voisinage les f_i et leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport aux y soient uniformes et continues (Cauchy); ou même que les f_i soient uniformes et continues, et qu'elles satisfassent pour deux systèmes quelconques de points $(x, y_1, \ldots, y_n)$, $(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ du domaine D défini par les inégalités $|x - a| \gtreqless r$, $|y_i - b_i| \gtreqless \rho$

Méthode des approximations successives ou de Picard (¹).

La première exige que les coefficients f_i soient analytiques (variables complexes) dans un certain domaine, et holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales $(a, b_1, \ldots, b_n)$: c'est celle que nous allons exposer.

Commençons par le cas d'une seule équation; nous la pren-

---

aux conditions dites *de Lipschitz*

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)| < k_1 |y_1 - \eta_1| + \ldots + k_n |y_n - \eta_n|,$$

les k désignant des constantes numériques positives (on sait du reste que dans plusieurs questions, autres que ces questions d'existence, on peut raisonner sur les fonctions lipschitziennes comme sur les fonctions dérivables. *Cf.* LEBESGUE, *C. R.*, 1903, 1er semestre, p. 660) ou même que des conditions plus larges encore soient satisfaites (*cf.* PAINLEVÉ, *Encyklopädie der M. W.*, t. II_1, p. 197).

Quand les conditions de Lipschitz sont vérifiées, le système de solutions trouvées (système qui est unique) satisfait au système (E) dans l'intervalle $(-l + a, a + l)$, l désignant le plus petit des nombres r, $\frac{\rho}{N}$, et N le module maximum des f_i dans D (Cauchy); et même dans tout l'intervalle où les intégrales $y_1, \ldots, y_n$ sont continues et définissent une courbe (à une dimension dans l'espace à $n+1$ dimensions) qui ne passe par aucun point où le système (E) cesserait de satisfaire aux conditions de Lipschitz : en dehors de cet intervalle, la solution ne peut être prolongée d'une façon continue ou peut l'être de plusieurs manières (Painlevé). De là cette propriété caractéristique de la méthode de Cauchy-Lipschitz : *les intégrales obtenues vérifient l'équation dans tout l'intervalle où elles sont continues* et définies sans ambiguïté par les conditions initiales. (*Cf.* PICARD, *C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 1363. — PAINLEVÉ, même Tome, p. 1505 et *B. S. M.*, 1899, p. 151. — LINDELÖF, *J. M.*, 1900, p. 423.)

M. Picard a étendu la méthode aux variables complexes. Quand les coefficients f_i sont holomorphes au point $(a, b_1, \ldots, b_n)$, elle donne des intégrales dont le rayon de convergence *surpasse* celui des solutions obtenues par le Calcul des limites (voir *infra*). Aussi ce procédé est-il particulièrement avantageux pour l'étude *quantitative* des fonctions définies par des équations différentielles, c'est-à-dire pour leur évaluation numérique (*cf.* PICARD, *B. D.*, 1888, p. 148; *Analyse*, t. II, p. 292 et 309).

(¹) M. Picard l'a appliquée aux systèmes différentiels ordinaires (*J. M.*, 1890, p. 197; *cf.* aussi LINDELÖF, *J. M.*, 1894, p. 117) et surtout aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (*J. M.*, 1890-1900; *J. E. P.*, 1890; *Théorie des surfaces* de M. DARBOUX, t. IV, Note I), soit pour établir des théorèmes d'existence, soit pour la recherche effective des solutions avec certaines conditions aux limites, en faisant le minimum d'hypothèses sur les données. A sa suite, de nombreux géomètres en ont tiré parti. *Cf.* DELASSUS, *A. E. N.*, 1895, S. — LE ROUX, *J. M.*, 1898, p. 368. — D'ADHÉMAR, *B. S. M.*, 1901, p. 190; *C. R.*, 1902, 1er semestre, p. 407. — COULON, *Thèse*, 1902, etc.

Cette méthode est applicable que les éléments des équations données soient des fonctions continues réelles satisfaisant à certaines conditions, ou des fonc-

drons sous la forme canonique ([1])

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

et nous supposerons que son coefficient f est holomorphe dans deux cercles (C, Γ) ayant respectivement pour centres a et b, pour rayons r et ρ (et sur leurs circonférences).

200. Théorème. — *Il existe une fonction y, holomorphe dans un cercle C_0 concentrique au cercle C, qui prend en a la valeur b et satisfait à l'intérieur de C_0 à l'équation différentielle considérée* ([2]). *Cette intégrale est unique* ([3]).

---

tions analytiques (variables complexes). Les séries obtenues convergent rapidement, mais on ne sait pas encore fixer leur intervalle *exact* de convergence. Pour les équations différentielles ordinaires, la convergence a au moins lieu dans l'intervalle $(-l+a, a+l)$ de la note précédente (Picard), et même dans un intervalle en général plus grand (Lindelöf), sans néanmoins s'étendre à tout le champ de continuité des intégrales.

Dans le cas des équations linéaires, cette méthode coïncide avec une méthode d'approximation de Cauchy (*Œuvres*, 1re série, t. V, p. 394; *voir* aussi p. 249; et Moigno, *Leçons, etc.*, t. II, p. 702). Cf. *C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 1365.

Aux trois méthodes citées dans le texte, on peut ajouter la *méthode de variation des constantes* (Cauchy, *C. R.*, 1840, 2e semestre, p. 1, 629, 730; 1842, 1er semestre, p. 101, 141, 188. — Poincaré, *A. M.*, t. XIII; *Méthodes de la Mécanique céleste*, t. I).

([1]) En général, dans les équations $F(x, y, y') = 0$ que l'on rencontre en Analyse, F est un *polynome* de degré n en y', est rationnel en y, est analytique en x : ces équations sont dites du premier ordre et du $n^{ième}$ degré.

Soit $y' = c$ une racine de l'équation $F(a, b, y') = 0$. Le théorème des fonctions implicites permet de concevoir la réduction de l'équation $F = 0$ à la forme (1), pourvu que la dérivée partielle de F par rapport à y' ne soit pas nulle au point (a, b, c) (p. 3).

Pour le cas général, *cf.* Forsyth, *Differential equations*, t. II, p. 225.

([2]) Depuis Cauchy, ces conditions aux limites sont devenues classiques, lorsqu'il s'agit de solutions analytiques d'équations à éléments analytiques : après quelques hésitations sur la définition d'intégrale générale, aujourd'hui on regarde comme telle celle que l'on peut ramener aux conditions de Cauchy.

On pourrait la définir par des hypothèses tout autres : même les types des théorèmes d'existence sont en nombre infini (n° 210).

([3]) La série $\mathfrak{P}(x)$ qui représente cette intégrale est l'*élément* générateur d'une fonction analytique, bien définie sur toute ligne L issue du point initial a et ne traversant aucune singularité de la fonction.

Cette fonction analytique satisfait dans tout son domaine d'existence à l'équation différentielle.

En effet, prenons sur une de ces lignes L un point x_1 à l'intérieur du cercle de

Pour l'établir, ramenons à l'origine le point (a, b) et écrivons l'équation donnée sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \ldots + a_{ik}x^i y^k + \ldots;$$

nous avons à démontrer qu'elle admet pour intégrale une série entière convergente

$$(\alpha) \qquad y = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p + \ldots = \mathfrak{P}(x) \qquad (\alpha_0 = 0).$$

D'abord, on peut déterminer les coefficients d'une série du type (α) de manière qu'elle satisfasse *formellement* à l'équation (1) : il suffit d'écrire l'identité

$$\mathfrak{P}'(x) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}\,\mathfrak{P}(x) + \ldots + a_{ik}\,x^i\,\overline{\mathfrak{P}(x)}^k + \ldots,$$

qui donne (Ire Partie, p. 224), en opérant comme si la série (α) était convergente

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = a_{00}, \\ 2\alpha_2 = a_{10} + a_{01}\alpha_1, \\ 3\alpha_3 = a_{01}\alpha_2 + a_{20} + a_{11}\alpha_1 + a_{02}\alpha_1^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

D'une manière générale, chaque coefficient α_p est une fonction entière *à coefficients positifs* de coefficients précédemment calculés $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ et des coefficients donnés $a_{ik} (i + k < p)$ (de plus, il a une valeur déterminée; par suite, la solution, si elle existe, est unique).

Tout est donc ramené à établir la convergence de la série (α). Pour y parvenir, transformons l'équation (1) en remplaçant y

---

convergence C_0 de $\mathfrak{P}(x)$; soit y_1 la valeur de $\mathfrak{P}(x_1)$. A la série $\mathfrak{P}(x)$ on peut substituer une série $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$, ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$, convergente dans un cercle C_1, série qui coïncide avec la série $\mathfrak{P}(x)$ dans la région commune aux cercles C_0 et C_1, et, par suite, satisfait dans cette région à l'équation différentielle (Ire Partie, p. 212).

Or, il existe, en vertu du théorème dont nous nous occupons, une série ordonnée suivant les puissances de $(x - x_1)$ qui prend en x_1 la valeur y_1 et qui satisfait à l'équation différentielle dans tout son domaine de convergence; de plus, cette série est unique. Elle n'est donc autre que la série $\mathfrak{P}_1$ qui est une série de puissances satisfaisant, dans le voisinage de x_1, à ces conditions (Ire Partie, p. 141 et 291). Donc, la série $\mathfrak{P}_1$ vérifie l'équation *dans le cercle* C_1 *tout entier*.

Et ainsi de proche en proche, par une chaîne de séries, on arrivera à atteindre tout point du domaine d'existence de la fonction analytique.

par Y et en substituant à la série f la fonction majorante (Ire Partie, p. 216)

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)}$$

[M désigne la limite supérieure du module des termes de la série f dans le domaine fermé (C, Γ)]; prouvons ensuite que l'équation transformée

$$(1') \quad \frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}Y + \ldots \qquad (b_{ik} \geqq |a_{ik}|)$$

est satisfaite par une série entière *convergente*

$$(\beta) \qquad Y = \beta_1 x + \ldots + \beta_p x^p + \ldots,$$

majorante vis-à-vis de (α).

D'abord, si l'on détermine la série (β) de manière qu'elle satisfasse *formellement* à l'équation (1'), *cette série* (β) *est majorante.* En effet, les équations qui fournissent, par identification, les coefficients β_p ne sont autres que les relations (2) où l'on aurait remplacé les a et les α par les b et les β ayant les mêmes indices. Dès lors, la remarque faite *sur la forme de ces relations* permet de déduire des inégalités $b_{ik} \geqq |a_{ik}|$ les inégalités à établir $\beta_p \geqq |\alpha_p|$.

De plus, *la série* (β) *est convergente,* comme va le montrer une *intégration directe.* On a, en effet,

$$\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)\frac{dY}{dx} = M\frac{1}{1-\frac{x}{r}}; \qquad Y - \frac{Y^2}{2\rho} = -Mr\log\left(1-\frac{x}{r}\right) + c.$$

Choisissons comme détermination du logarithme celle qui s'annule à l'origine; dans ces conditions, la constante d'intégration c sera nulle, puisque Y doit s'annuler avec x. On aura donc

$$Y = \rho - \rho\sqrt{1 + \frac{2Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}$$

(nous prendrons comme détermination du radical celle qui, à l'origine, a la valeur $+1$).

Le logarithme est holomorphe à l'intérieur du cercle C; aussi

cette solution Y de l'équation (1') est holomorphe à l'intérieur d'un cercle C_0 dont le rayon r_0 est fourni par les égalités équivalentes

$$1 + \frac{2Mr}{\rho}\log\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = 0, \qquad r_0 = r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right).$$

Tel est le rayon de convergence de la série (β); celui de la série (α) lui est *au moins égal :* cette série intégrale (α) converge *certainement* dans le cercle C_0 (¹).

(¹) Cette façon de présenter le *Calcul des limites* est due à Weierstrass (*Œuvres*, t. I, p. 75) et à M. Méray (*cf.* aussi : KŒNIGSBERGER, *J. de Crelle*, t. 104, p. 174 et *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen*, K. I, S. 3) : au point de vue didactique, elle est préférable à celle de Cauchy, même perfectionnée par Briot et Bouquet (*J. E. P.*, 1856, XXXVIe Cahier). Dans cette dernière méthode, les coefficients de la série intégrale (α) sont tirés directement de l'équation donnée sans recourir au développement en série de la fonction holomorphe f; de plus, dans la formation des séries majorantes qui servent à prouver la convergence, on remplace les considérations tirées de la théorie des séries multiples (Ire Partie, p. 216) par des propositions relatives aux intégrales imaginaires (Ire Partie, p. 297).

Mettons brièvement ce second procédé en regard du premier.

L'équation (1) permet de calculer de proche en proche, pour $x = 0$, les dérivées successives de toute intégrale de cette équation, nulle à l'origine. Car sa dérivée première prend à l'origine la valeur $f(0, 0)$; cette dérivée première connue, la relation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (\text{où l'on fait } x = y = 0),$$

fournit la dérivée seconde; et ainsi de suite.

D'autre part, si l'équation a une intégrale y holomorphe à l'origine et nulle en ce point, on a, dans le voisinage de $x = 0$,

$$(\alpha) \qquad y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 x^2 + \ldots = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots.$$

Cette série (α), si elle converge, vérifie l'équation (1), puisque les fonctions $\frac{dy}{dx}$ et $f(x, y)$, où y a reçu la valeur (α), sont deux fonctions holomorphes de x, égales à l'origine ainsi que toutes leurs dérivées.

Pour montrer sa convergence, désignons par N le module maximum de $f(x, y)$ dans le champ double (C, Γ), frontière comprise, et remplaçons comme toujours la fonction $f(x, y)$ par une fonction majorante (Ire Partie, p. 298)

$$\frac{N}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} = F(x, y)$$

(elle est moins avantageuse que celle employée dans le texte). L'intégration

Toute solution, *holomorphe au point a*, qui correspond aux conditions initiales (a, b) coïncide évidemment avec la solution de Cauchy. Nous verrons bientôt qu'il ne saurait y avoir d'autre solution analytique, qui soit holomorphe au voisinage δ de a, mais

---

directe faite dans le texte montre que l'équation auxiliaire

$$\frac{dY}{dx} = \frac{N}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)}$$

définit une fonction nulle à l'origine et holomorphe dans un cercle C'_0 de rayon

$$r'_0 = r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Nr}}\right).$$

Représentons son développement par

$$(\gamma) \qquad Y = \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 x^2 + \ldots = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots.$$

Les coefficients γ_p, sommes de termes tous positifs, sont positifs : ils ne sont jamais inférieurs aux modules des coefficients correspondants de la série (α), comme le montre la comparaison terme par terme des éléments des sommes α_p, γ_p; on a, en effet,

$$2\alpha_2 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 f(x, y)_0,$$

$$2\gamma_2 = \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 F(x, y)_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en général,

$$\left|\frac{\partial^{q+r} f}{\partial x^q\, \partial y^r}\right|_0 \overline{\overline{<}} \left(\frac{\partial^{q+r} F}{\partial x^q\, \partial y^r}\right)_0.$$

La série (γ) est donc majorante relativement à (α), et, par suite, sa convergence dans le cercle C'_0 entraîne *a fortiori* la convergence de la série (α) dans le même cercle.

Ainsi, par cette méthode de Briot et Bouquet, la convergence est certaine dans le cercle de rayon r'_0. M. Picard a montré que, dans le cas où le coefficient f est analytique (variables complexes), la méthode de Cauchy-Lipschitz assure la convergence dans un cercle de rayon l, l étant au moins égal au plus petit des nombres r et $\frac{\rho}{N}$. On voit aisément que *l surpasse r'_0*.

En remplaçant les inégalités du n° 181, sur lesquelles toute la démonstration repose, par d'autres plus avantageuses, M. Stæckel a obtenu un rayon de convergence r''_0

$$r''_0 = r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2N_1 r}}\right) > r'_0,$$

où N_1 représente un nombre plus petit que N (*C. R.*, 1898, 1er semestre, p. 203).

non au point a lui-même, et qui tende vers b quand x tend vers a en restant à l'intérieur de δ (n° 202).

201. Revenons à un système différentiel du premier ordre à n variables. Prenons-le sous la forme (E) et supposons que les coefficients différentiels f_i soient holomorphes dans un champ multiple (C, Γ_i), formé par $n+1$ cercles ayant pour centres les points a et b_i (frontières comprises).

THÉORÈME. — *Les équations données admettent un système d'intégrales, holomorphes dans un cercle concentrique au cercle C, et prenant en a les valeurs b_i : ce système est unique.*

Pour établir ce théorème, il n'y a qu'à raisonner comme ci-dessus. Ramenons à l'origine les valeurs initiales (a, b_i) et, pour abréger, opérons sur les trois équations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z, u) = \sum a_{ghik}\, x^g y^h z^i u^k,$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z, u) = \sum b_{ghik}\, x^g y^h z^i u^k,$$

$$\frac{du}{dx} = \psi(x, y, z, u) = \sum c_{ghik}\, x^g y^h z^i u^k.$$

Première partie. — Admettons l'existence d'intégrales du type

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p x^p, \qquad z = \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p x^p, \qquad u = \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p x^p.$$

En en calculant les coefficients par identification, on voit que les α, β, γ sont des fonctions entières à coefficients *positifs* des paramètres a, b, c donnés et de coefficients α, β, γ déjà calculés. Aussi, pour établir la convergence de ces trois séries, il suffit de remplacer les fonctions f, φ, ψ chacune par la fonction majorante

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y + Z + U}{\rho}\right)}$$

(où r désigne le rayon du cercle C, ρ le plus petit des rayons des

trois cercles Γ formant le champ quadruple dans lequel les séries f, φ, ψ convergent, et M le module maximum de leurs termes dans ce champ), puis de prouver l'existence de solutions holomorphes à l'origine pour le système

$$(3) \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = \frac{dU}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y + Z + U}{\rho}\right)}.$$

En vertu des deux premières équations, les différences Y — Z et Z — U sont constantes; les fonctions Y, Z, U sont donc identiques, puisque, par hypothèse, elles s'annulent avec x. On a donc à considérer l'équation unique, directement intégrable

$$\frac{dV}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{3V}{\rho}\right)}.$$

C'est l'équation (1') (p. 18), où l'on aurait remplacé Y par 3V et M par 3M; elle a donc une intégrale V, nulle avec x, holomorphe dans un cercle C_0 concentrique à C dont le rayon r_0 a au moins pour valeur $r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{6Mr}}\right)$ (¹).

202. *Seconde partie.* — Le système de solutions *holomorphes*, qui répond aux conditions initiales données, est *unique*, puisque l'identification conduit à des valeurs déterminées pour les coefficients des séries intégrales. Mais n'y a-t-il pas d'*autres* systèmes de solutions, satisfaisant aux mêmes conditions initiales?

Pour traiter cette question, reprenons le système (E) et les conditions initiales (a, b_1, ..., b_n).

(¹) Dans le cas de n fonctions y_i, on a avec la fonction majorante du texte

$$r_0 = r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2nMr}}\right).$$

La fonction majorante $\dfrac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1 - \frac{Y_n}{\rho}\right)}$ aurait donné

$$r_n = r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{(n+1)Mr}}\right).$$

THÉORÈME [1]. — *Le système* (E) *n'a pas de système de solutions analytiques* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *holomorphes dans un domaine attenant au point* a, *mais non au point* a *lui-même* (*ou encore holomorphes sur un chemin* L *aboutissant en* a, *sauf en* a), *et telles que ces solutions tendent vers* $b_1, \ldots, b_n$ *quand* x *tend vers* a *sur* L.

Précisons bien l'énoncé du théorème. En modifiant s'il en est besoin le chemin L, on peut le supposer rectifiable : soit s son arc compté à partir d'un point x_1, de x_1 vers a; s croît quand x va de x_1 vers a et il tend vers une limite σ, finie ou infinie, quand x tend vers a. On conviendra de dire que x *tend vers* a *sur* L [2], si l'on peut assigner à s une valeur s' assez grande pour qu'à partir du point x' correspondant, la distance rectiligne $\overline{xa}$ reste inférieure à tout nombre donné [3].

Cela posé, considérons un point (x_0, y_i^0) voisin du point (a, b_i), et le système d'intégrales

$$(4) \qquad y_i(x) = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

relatif aux conditions initiales (x_0, y_i^0), fourni par le théorème

---

(1) Il sert de fondement pratique aux applications des équations différentielles : là, en effet, il importe, après avoir trouvé une solution d'un problème, de savoir s'il y en a d'autres.

Briot et Bouquet l'ont prouvé dans l'hypothèse où le chemin L, dont nous allons parler, a une longueur finie (*J. E. P.*, XXXVIe Cahier, p. 144). Son énoncé a été précisé par M. Picard, qui l'a établi en supposant démontré le théorème de l'existence des fonctions implicites et de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Analyse*, t. II, p. 314). La démonstration de M. Painlevé, que nous donnons ici, est directe (*Leçons de Stockholm*, p. 19 et 395; *B. S. M.*, 1900, p. 191).

(2) Si le chemin L a une longueur finie, cette phrase n'a qu'un sens possible; mais ce chemin peut admettre le point a comme point asymptote et avoir une longueur croissant indéfiniment. C'est pour avoir considéré des chemins qui ne s'approchent pas de a au sens du texte que Fuchs (*Sitzungsb. der A. zu Berlin*, 1886, p. 283) et M. Forsyth (*Differential equations*, t. II, p. 44 et 80) ont contesté le théorème.

(3) Ainsi, à tout nombre positif ε doit correspondre un point x' tel qu'à partir de ce point la courbe L ne sorte plus du cercle de centre a et de rayon ε.

Par fonction $\varphi(x)$ holomorphe sur L sauf en a, et *tendant vers* b quand x tend vers a sur L, on entend une fonction telle qu'à tout nombre positif η on puisse faire correspondre un nombre ε et, par suite, un point x', de façon que l'on ait $|\varphi(x) - b| < \eta$, en tous les points x de L à partir de x'.

de Cauchy. *Ces intégrales considérées comme fonctions des $n+2$ variables $(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ sont des fonctions analytiques, holomorphes au point $(a, a, b_1, \ldots, b_n)$* (¹).

Si l'on suppose le point $(x_0, x, y_1, \ldots, y_n)$ voisin lui aussi de $(a, a, b_1, \ldots, b_n)$, on peut permuter les valeurs (x_0, y_i^0) et (x, y_i), et dès lors regarder comme système de solutions des équations (E) (et comme système unique répondant à ces nou-

---

(¹) Ce lemme est une conséquence du théorème de Cauchy.

En effet, les intégrales considérées $\varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ sont des fonctions analytiques de x, holomorphes au point x_0; de plus, elles convergent absolument, pour tous les systèmes de valeurs des x_0 et y_i^0 intérieurs à un certain domaine, en tous les points x du domaine $|x - x_0| < \delta$, δ désignant un nombre positif déterminé.

Soit δ' un nombre positif inférieur à δ; lorsque les points x_0 et y_i^0 restent dans un certain domaine, les modules des fonctions φ_i ont une limite supérieure N dans le domaine $|x - x_0| \overline{\gtrless} \delta'$. Si l'on désigne par $\varphi_{i\nu}$ la fonction holomorphe qui représente le coefficient de $(x - x_0)^\nu$ dans φ_i, on a (Iʳᵉ Partie, p. 297)

$$|\varphi_{i\nu}(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)(x - x_0)^\nu| \overline{\gtrless} \mathrm{N}\left|\frac{x - x_0}{\delta}\right|^\nu.$$

Par suite, si l'on enlève à la série φ_i ses m premiers termes, la somme des modules des termes restants n'atteindra pas

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} \mathrm{N}\left|\frac{x - x_0}{\delta}\right|^\nu = \frac{\mathrm{N}\left|\dfrac{x - x_0}{\delta}\right|^m}{1 - \left|\dfrac{x - x_0}{\delta}\right|},$$

et elle deviendra inférieure à tout nombre donné ε pour m suffisamment grand (ε est indépendant des valeurs particulières $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ dans le domaine considéré). Donc, pour ces valeurs, les séries φ_i convergent non seulement absolument, mais aussi *uniformément* : dès lors, ce sont des fonctions analytiques uniformes des $n+2$ variables (x, x_0, y_i^0), à l'intérieur de cercles dont les rayons restent supérieurs à une limite fixe (Iʳᵉ Partie, p. 219). Il suffit de prendre

$$|x - a|, \quad |x_0 - a|, \quad |y_i^0 - b_i|$$

assez petits, pour qu'elles soient holomorphes au point (a, a, b_i). *Cf.* WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. I, p. 80.

Voici du reste comment procéder pour fixer les domaines dont nous venons de parler. Pour simplifier, faisons $n = 1$, et raisonnons sur l'intégrale $\varphi(x, x_0, y_0)$ de l'équation $y' = f(x, y)$ qui correspond aux conditions initiales (x_0, y_0).

1° Soient C et Γ les cercles de centres (a, b), de rayons (r, ρ) dans lesquels $f(x, y)$ est holomorphe; C_2 et Γ_2 deux cercles concentriques de rayons $\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$: cherchons d'abord une limite du rayon de convergence de la série intégrale φ,

velles conditions initiales) les intégrales premières de ces équations définies par les relations

$$(5) \qquad y_i^0 = \varphi_i(x_0, x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

C'est dire que l'on résout par rapport aux y_i^0 les équations (4) en permutant les lettres (x, y_i), (x_0, y_i^0).

---

ordonnée suivant les puissances de $(x - x_0)$, quand on suppose le point (x_0, y_0) intérieur au champ (C_2, Γ_2).

Le coefficient f est holomorphe dans le champ double formé par les cercles de centres (x_0, y_0), de rayons $\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$ puisqu'ils sont intérieurs au champ (C, Γ); dans ce champ plus restreint, son module maximum ne dépasse pas le module maximum N de f dans le champ (C, Γ). Donc, d'après la démonstration de Briot et Bouquet, le rayon de convergence de la série φ est au moins égal au nombre r_2 défini par l'égalité

$$r_2 = \frac{r}{2}\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Nr}}\right) = \frac{1}{2} r'_0,$$

quelle que soit la position de (x_0, y_0) dans (C_2, Γ_2).

2° Regardons maintenant $\varphi(x, x_0, y_0)$ comme une fonction de trois variables; elle est holomorphe, avons-nous vu, dans le voisinage du point (x_0, x_0, y_0). Pour montrer que le point (a, a, b) appartient à ce domaine, rappelons qu'une série entière $\mathfrak{P}(\xi)$, convergente dans un cercle de rayon δ, peut être remplacée par une série de puissances $\mathfrak{P}(\xi - \xi_0)$, qui converge au moins dans le champ

$$|\xi_0| + |\xi - \xi_0| < \delta,$$

et, par suite, aux points

$$|\xi - \xi_0| < \frac{\delta}{2},$$

quand on suppose

$$|\xi_0| < \frac{\delta}{2}.$$

Dès lors, à la série $\varphi(x, x_0, y_0)$ convergente dans le champ

$$|x - x_0| < r_2,$$

quand elle est ordonnée suivant les puissances de $(x - x_0)$, on peut substituer une série ordonnée suivant les puissances de $(x - a)$, convergente dans le champ

$$|x - a| < \frac{1}{2} r_2,$$

quand on a

$$|x_0 - a| < \frac{1}{2} r_2 \quad \text{et} \quad |y_0 - b| < \frac{1}{2} \rho.$$

La convergence de la série φ comme série multiple est donc assurée dans le champ triple

$$|x - a| < \frac{1}{2} r_2, \quad |x_0 - a| < \frac{1}{2} r_2, \quad |y_0 - b| < \frac{1}{2} \rho.$$

Ce lemme admis, effectuons dans les équations (E) le changement de variables défini par les relations

$$(4') \qquad y_i = \varphi_i(x, a, Y_1, \ldots, Y_n),$$

d'où l'on tire, d'après ce qui précède,

$$(5') \qquad Y_i = \varphi_i(a, x, y_1, \ldots, y_n),$$

et voyons ce qu'elles deviennent. Quand le point (x, y_i) est voisin de (a, b_i) les fonctions Y_i sont voisines des b_i. A la solution de Cauchy du système (E) définie par les conditions initiales (x_0, y_i^0) voisines de (a, b_i) correspond pour les Y_i le système de solutions

$$Y_i(x) = Y_i(x_0),$$

car en vertu des relations (5) et (4), $y_i(x_0)$ a comme expressions $\varphi_i(x_0, x, y_1, \ldots, y_n)$ et $\varphi_i(x_0, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, ce qui démontre l'identité de $\varphi_i(a, x, y_1, \ldots, y_n)$ et de $\varphi_i(a, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, et par suite celle de $Y_i(x)$ et de $Y_i(x_0)$. Le système (E) s'est donc transformé en un système tel que sa solution de Cauchy se réduise à $Y_i = Y_i^0$ quelles que soient les conditions initiales (x_0, Y_i^0) voisines de (a, b_i). Par suite, dans le système transformé, les coefficients différentiels doivent être identiquement nuls; ce système sera donc

$$(E') \qquad \frac{dY_i}{dx} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Par cette transformation, le théorème est évident. En effet, imaginons un système de solutions $y_i(x)$ des équations (E) holomorphe sur un chemin L aboutissant en a, mais non holomorphe en a, et tel que ces solutions tendent vers les valeurs b_i quand x tend vers a par la courbe L. A ce système correspondra un système de solutions $Y_i(x)$ des équations (E'), qui aura les mêmes propriétés. Ce résultat est impossible, puisque le système $Y_i(x)$ est composé, en vertu des équations (E'), de fonctions qui sont constantes sur L et, par suite, ne diffèrent pas des solutions $Y_i = b_i$ fournies par le théorème de Cauchy.

203. Comment étendre les résultats obtenus jusqu'ici à un système d'équations différentielles d'ordre quelconque?

L'étude d'un pareil système se ramène, au moyen de différen-

tiations et d'éliminations ([1]), à l'étude séparée de plusieurs équations de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Chacune d'elles, à son tour, peut être remplacée par un système de n équations du premier ordre, en posant

$$\frac{dy}{dx} = u_1, \qquad \frac{du_1}{dx} = u_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_{n-2}}{dx} = u_{n-1},$$
$$\frac{du_{n-1}}{dx} = f(x, y, u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

C'est un système différentiel du type de ceux que l'on vient de discuter. On peut donc dire qu'étant donnés une équation d'ordre n résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé et un système de valeurs arbitraires de la fonction et de ses $n - 1$ premières dérivées $(b_1, \ldots, b_n)$ correspondant à une valeur arbitraire a de x et pour lesquelles le coefficient différentiel $f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$ est holomorphe, il existe une intégrale holomorphe et une seule, qui satisfait à l'équation et prend au point a, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, les valeurs arbitraires données ([2]).

On a, pour les systèmes d'équations, des résultats analogues.

204. Jusqu'ici, nous avons traité le problème de l'existence des fonctions analytiques définies par des relations différentielles, en nous occupant seulement de leur *élément* initial ([3]) : il suffit à déterminer la fonction. Ne peut-on poursuivre, *sur l'équation elle-même,* l'étude de l'intégrale obtenue, rechercher si elle est

---

([1]) Ces remarques ont été faites dès la fin du XVIIIe siècle. *Cf.* JACOBI, *Œuvres,* t. V, p. 193 et 483. — JORDAN, *Analyse,* 2e édit., t. III, p. 3.

([2]) Le cas de l'équation $F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$ se ramène immédiatement à celui du texte, pourvu que les deux équations

$$F(a, b_1, \ldots, b_{n+1}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b_{n+1}}(a, b_1, \ldots, b_{n+1}) = 0$$

n'aient pas de racine commune b_{n+1}.

([3]) Nous avons supposé les conditions initiales telles que les coefficients différentiels fussent holomorphes au point correspondant. Quand il en est autrement, les cas très compliqués qui peuvent se présenter ont fait l'objet des travaux de BRIOT et BOUQUET (*J. E. P.*, XXXVIe Cahier, 1856. — PICARD, *Analyse,* t. III, p. 23), de MM. PICARD (*B. S. M.*, 1884, p. 48) et POINCARÉ (*J. M.*, 1881, 1882, 1885), de FUCHS (*Sitzungsb. d. A. zu Berlin,* 1886, p. 279), etc.

uniforme, si elle a un nombre fini ou infini de branches, reconnaître ses singularités?

A la suite de Fuchs ([1]) de nombreux géomètres ont étudié à ce point de vue les équations linéaires et celles qui s'y rattachent; de là, une série de remarquables travaux ([2]) dont le point de départ a été cette proposition si simple :

Les intégrales d'une équation linéaire et homogène ne peuvent avoir d'autres singularités que celles des coefficients de cette équation.

Avant de dire un mot du problème énoncé relatif aux équations différentielles quelconques, répartissons en deux catégories leurs points singuliers. La première renfermera ceux qui sont singuliers pour toute intégrale, *quelles que soient les conditions initiales.* Ces singularités sont mises en évidence par la forme même de l'équation, et dépendent uniquement de ses coefficients : on les appelle *singularités fixes.* L'exemple classique des équations n'ayant que des singularités fixes est fourni par les équations linéaires.

En dehors de ces points singuliers *fixes,* qui sont *apparents* sur l'équation, il y a ceux dont la position dépend des conditions initiales, c'est-à-dire du choix que l'on a fait arbitrairement de ces conditions : ils varient d'une intégrale à l'autre. Les points de cette seconde catégorie sont appelés *singularités mobiles* ([3]).

On conçoit facilement l'existence de pareilles singularités. Prenons une équation du premier ordre et du premier degré. En un point x_0 (laissons de côté les intégrales qui seraient indéterminées en ce point, s'il en existe), son coefficient différentiel peut n'être

---

([1]) Parmi ses Mémoires classiques, citons ceux du *J. de Crelle,* t. 66 et 68. *Voir* aussi : *J. de Crelle,* t. 75, 106, 108 et *Sitzungsb. d. A. zu Berlin,* 1884, 1885, 1887. — *Cf.* aussi : TANNERY, *A. E. N.*, 1875.

([2]) Citons seulement : THOMÉ, *J. de Crelle,* t. 74, 75, 76 (et 83, 91, 95, 96). — FROBENIUS, *J. de Crelle,* t. 76, 77, 80, 82, 85. — HAMBURGER, *J. de Crelle,* t. 76, 83. — POINCARÉ, *A. M.,* t. IV, p. 8. — MITTAG-LEFFLER, *A. M.,* t. XV. — SAUVAGE, *A. E. N.*, 1886, 1888, 1889. — FLOQUET, *A. E. N.*, 1879, 1883, 1884, 1887. — VESSIOT, *A. E. N.*, 1892. — Comme Ouvrages classiques consacrés aux équations linéaires, mentionnons celui de M. SCHLŒSINGER (1895-1898) et le Tome IV du Traité de M. FORSYTH (1902). — *Voir* aussi : PICARD, *Analyse,* t. III.

([3]) Par exemple, les équations $yy'+x=0$, $y'+y^2=0$ ont respectivement pour intégrales $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=(x-a)^{-1}$. Les points critiques $\pm a$ et le pôle a dépendent de la constante a, et, dès lors, varient avec chaque intégrale.

holomorphe pour aucune valeur de y, il peut cesser d'être holomorphe pour certaines valeurs de y, il peut être holomorphe pour toute valeur de y.

Dans le premier cas, x_0 peut être une singularité pour toutes les intégrales (x_0 est alors une singularité fixe). Dans le second cas, x_0 peut être une singularité seulement pour certaines intégrales (x_0 est alors une singularité mobile). Dans le troisième cas, le théorème de Cauchy donne des intégrales toutes régulières en x_0. Parmi elles, celles qui correspondent à des conditions initiales différentes n'ont pas, en général, le même cercle de convergence pour leurs éléments générateurs, et, par suite, *a fortiori*, n'ont pas les mêmes singularités (rappelons qu'une fonction analytique a, au moins, une singularité sur le cercle de convergence de chacun de ses éléments); les singularités de ces intégrales dépendent donc des conditions initiales choisies, ce sont des singularités mobiles.

Une singularité, qu'elle soit fixe ou mobile, est dite *essentielle* quand l'intégrale est *indéterminée* en ce point (1). Ce sont les singularités *essentielles mobiles,* dont rien, sur les équations, ne fait prévoir l'existence, qui constituent l'une des grandes difficultés de la théorie des équations différentielles (2). Dans le cas

---

(1) On peut classifier comme il suit les singularités des fonctions, et, dès lors, celles des intégrales des équations différentielles :

1° Un point, isolé ou non, où l'intégrale cesse d'être régulière, est *point critique* lorsque, autour de ce point, plusieurs déterminations se permutent, ou lorsqu'il fait partie d'une ligne singulière autour de laquelle des déterminations s'échangent. Ce point critique est *algébrique,* si la fonction a en ce point une valeur déterminée (finie ou infinie) et dans son voisinage un nombre fini de valeurs; sinon, il est *transcendant.*

2° Prenons un point singulier, isolé ou non, a qui ne soit ni un pôle, ni un point critique algébrique. C'est un point *essentiel ou d'indétermination* s'il existe un chemin L tendant vers a, tel que l'intégrale ne tende vers aucune valeur déterminée, finie ou infinie, quand x tend vers a en suivant la courbe L (que la fonction soit uniforme ou multiforme dans le voisinage de a) : tel est le point o pour les fonctions $e^{\frac{1}{x}}$, sin log x.

Dans le cas contraire, on a un point *transcendant ordinaire* (on dit souvent un point transcendant) : tel est le point o pour la fonction log x.

Les singularités essentielles peuvent former des ensembles ponctuels des trois types indiqués plus haut (Ire Partie, p. 28) ou des ensembles linéaires. *Cf.* PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm,* p. 9; Introduction, p. 6.

(2) Mettons en regard quelques équations différentielles, leurs intégrales, leurs

du premier ordre, M. Painlevé l'a fait en grande partie disparaître par ce théorème fondamental :

Les seules singularités mobiles possibles d'une équation du premier ordre sont des pôles et des points critiques algébriques (1).

---

singularités :

Équations.	Intégrales.	Singularités mobiles.	Singularités fixes.
$2xyy' = 1$	$(\log x - a)^{\frac{1}{2}}$	e^a	$0, \infty$
$ny' + y^{n+1} = 0$	$(x - a)^{-\frac{1}{n}}$	a	∞
$xy' + y^2 = 0$	$(\log x - a)^{-1}$	e^a	$0, \infty$
$x^2y' + y = 0$	$a\, e^{\frac{1}{x}}$	″	0
$x^2y'^2 + y^2 - y^4 = 0$	$\operatorname{coséc}(\log x - a)$	e^a	$0, \infty$
$y'' = \dfrac{y'^2}{y(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left[2y^2 - 1 - (y^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$ ...	$\operatorname{coséc}[\log(x - b) - a]$	$e^a + b, b$	∞
$y'' = y'^2 \dfrac{2y-1}{1+y^2}$	$\operatorname{tang}[\log(ax - b)]$	$\dfrac{b}{a}$	∞

Pour la première et la deuxième équation les singularités mobiles sont des points critiques algébriques; ce sont des pôles pour la troisième et la cinquième. Ces équations du premier ordre ont des points essentiels et critiques transcendants (la première, la troisième, la cinquième) ou simplement essentiels (la quatrième), mais ils sont *fixes*.

Les deux équations du second ordre ci-dessus ont des points *essentiels* (et critiques transcendants) qui sont *mobiles* $\left(\text{les points } b, \dfrac{b}{a}\right)$ ou fixes (le point ∞). Le point $e^a + b$ est un pôle.

Les équations du troisième ordre offrent la singularité plus curieuse encore de *lignes essentielles variables* avec les constantes d'intégration : telle est l'équation du troisième ordre que vérifie la fonction modulaire (même en ce cas, la coupure essentielle a, en chaque point, une tangente mais pas de courbure).

Cf. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 5; *A. M.*, t. XXV, p. 5. — Forsyth, *Differential equations*, t. II, p. 217.

(1) Cf. *Leçons de Stockholm*, p. 21. (*Voir* aussi : Picard, *Analyse*, t. II, p. 326. — Forsyth, *Differential equations*, t. II, p. 211 et 266.)

Le théorème est seulement vrai des équations $F(x, y, y') = 0$, où F est algébrique en y et y', et analytique en x. Ainsi l'équation $y' = \alpha e^{\beta y}$ a comme intégrale générale

$$\beta y = -\log \alpha\beta(a - x) :$$

le point $x = a$ est un point essentiel mobile, mais l'équation n'est pas algébrique en y.

Si F est algébrique en y, y', *et aussi* en x, les singularités mobiles sont en nombre fini, et leurs affixes se calculent algébriquement sur l'équation elle-même (Painlevé, *A. T.*, 1888, B., p. 38).

Démontrons-le en supposant que l'équation est du premier degré et a pour coefficient différentiel une fraction rationnelle en y; prenons-la sous la forme

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

P et Q désignant des polynomes en y, premiers entre eux quel que soit x, dont les coefficients $p_i(x)$ et $q_i(x)$ sont des fonctions analytiques quelconques de x.

Recherchons toutes les singularités possibles de l'équation différentielle, et d'abord occupons-nous des singularités non essentielles. Dans ce but, à une valeur quelconque x_0 de x pour laquelle les branches considérées des fonctions $p_i(x)$, $q_i(x)$ sont régulières et qui n'annule pas tous les coefficients $q_i(x)$, associons une valeur *déterminée* y_0 et voyons si l'équation différentielle admet une solution prenant en x_0 la valeur y_0.

Quand son coefficient différentiel est holomorphe en (x_0, y_0), la réponse est donnée par le théorème de Cauchy : il existe une intégrale et une seule tendant vers y_0 quand x tend vers x_0; et elle est holomorphe en x_0.

Quand on a $Q(x_0,y_0)=0$, $P(x_0,y_0)\gtrless 0$, il existe encore une intégrale et une seule prenant en x_0 la valeur y_0; le point x_0 est pour elle un point critique algébrique [1].

Enfin, quand $P(x_0,y_0)$ et $Q(x_0,y_0)$ sont nuls à la fois, il peut se faire qu'il n'y ait pas de solution égale à y_0 en x_0, ou bien qu'il y en ait un nombre fini ou un nombre infini : le point x_0 peut être un point transcendant pour ces intégrales.

Nous supposions y_0 fini. Pour étudier ce qui arrive quand y_0 est infini, faisons la substitution (y, y^{-1}). D'après ce que nous venons d'établir, l'équation transformée

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2 P(x,y^{-1})}{Q(x,y^{-1})}=\frac{P_1(x,y)}{Q_1(x,y)}$$

ne peut avoir de points singuliers *transcendants* correspondant à

---

[1] On le voit immédiatement en regardant dans l'équation donnée y comme la variable indépendante, ce qui permet de lui appliquer le théorème de Cauchy, et en faisant ensuite l'inversion de l'intégrale $x(y)$ obtenue.

la valeur $y = 0$ que si $P_1(x, 0)$, $Q_1(x, 0)$ sont nuls à la fois; les autres points sont des pôles ou des points critiques algébriques.

En résumé, les seuls points transcendants possibles qui correspondent à des *valeurs déterminées,* finies ou infinies, de y sont : 1° les points singuliers des coefficients p_i et q_i, et les points où s'annulent à la fois tous les coefficients q_i; 2° les points x qui correspondent aux racines communes aux équations $Q(x, y) = 0$, $P(x, y) = 0$, ou bien aux équations $P_1(x, 0) = 0$, $Q_1(x, 0) = 0$. Notons que ces points x sont tous *fixes* (ceux qui dépendaient de y_0 étaient des pôles ou des points critiques algébriques), et représentons leur ensemble par $\mathcal{E}$.

Il ne reste plus qu'à chercher les singularités qui correspondent à des valeurs *non déterminées* de y, par suite, à examiner s'il se trouve des points a tels que x tendant vers a par un chemin L qui ne passe par aucun point de $\mathcal{E}$, une intégrale, définie en un point x_0 de L voisin de a par les conditions de Cauchy, soit indéterminée en a.

Je dis qu'il n'en existe pas. En effet, dans le plan x, traçons autour du point a à étudier une circonférence C de rayon très petit r; dans le plan y, marquons les racines $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de l'équation

$$Q(a, y) = 0.$$

Quand x se meut à l'intérieur de C, les racines $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation

$$Q(x, y) = 0$$

ne sortent pas de cercles $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ dont les rayons sont tous inférieurs à un nombre très petit ρ, si r est suffisamment petit. Par suite, si l'on désigne par $\mathcal{D}$ le domaine extérieur aux cercles $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ et intérieur à une circonférence Γ de rayon très grand, $Q(x, y)$ ne s'annule pas tant que le point (x, y) reste dans le domaine $(C, \mathcal{D})$: dès lors, le coefficient différentiel de l'équation est (sauf aux points de $\mathcal{E}$) holomorphe dans ce champ; à des conditions initiales (x_0, y_0) relatives à ce champ correspondra une intégrale holomorphe dans un cercle de centre x_0. Faisons varier d'une manière continue le point (x_0, y_0) dans ce champ en évitant les points de $\mathcal{E}$; le rayon de ce cercle varie d'une manière continue, et, dès lors, dépasse toujours un minimum λ *positif* (Ire Partie,

p. 3o3). Appelons C_1 la circonférence décrite de a comme centre avec λ pour rayon.

Raisonnons maintenant par l'absurde. S'il existait une intégrale ne tendant vers aucune valeur déterminée, finie ou infinie, quand x tend vers a par la courbe L, il y aurait des points x_0 intérieurs à C_1 auxquels correspondraient des valeurs y_0 de l'intégrale intérieures au domaine $\mathfrak{D}$ (sinon, l'intégrale tendrait vers l'une des valeurs $\eta_1, \ldots, \eta_n, \infty$, quand x tend vers a). Or, une intégrale qui prendrait en un point quelconque x_0 intérieur à C_1 une valeur y_0 intérieure à $\mathfrak{D}$, serait holomorphe dans le cercle de centre x_0 et de rayon λ, et, par suite, elle serait holomorphe en a, ce qui est contre l'hypothèse.

205. Après avoir établi cette distinction entre les singularités mobiles et les singularités fixes, reprenons l'étude des fonctions définies par un système différentiel.

Les fondateurs du Calcul intégral avaient spécialement étudié les équations résolubles à l'aide de transcendantes élémentaires (comme les équations linéaires à coefficients constants, intégrables par l'exponentielle), celles qui sont réductibles aux quadratures (comme les équations linéaires du premier ordre et celles de Bernoulli) (1); longtemps ensuite, le seul procédé d'intégration essayé consistait à s'efforcer de ramener les équations différentielles à des combinaisons d'équations linéaires, de quadratures, d'équations du premier ordre.

Aujourd'hui, les fonctions analytiques uniformes et même les fonctions multiformes à un nombre fini de branches ont des modes de représentation assez connus, pour que l'on puisse regarder comme intégrées, au sens large du mot, celles dont la

(1) Les méthodes d'intégration employées pour chacun de ces types d'équations semblaient différentes : Lie a découvert un lien entre elles, en montrant que *toutes les équations ainsi intégrées restent invariables par les transformations d'un groupe continu.*

Il a été ainsi conduit à poser le problème de l'intégration d'un système différentiel admettant un groupe connu. On essaie de le résoudre, non pas en cherchant à exprimer les intégrales du système par des fonctions connues, mais en faisant l'étude analytique des fonctions qu'il définit. De là un autre moyen de tirer parti de la théorie des fonctions analytiques pour le problème de l'intégration.

solution générale est une fonction de l'un de ces types. Dès lors, rechercher les équations différentielles à intégrale uniforme, c'était *tenter une méthode nouvelle d'intégration* et tirer parti, au point de vue de leur résolution, des brillants résultats obtenus dans la Théorie des fonctions. En procédant ainsi, on marchait dans la voie ouverte par Abel et Jacobi qui, en résolvant le problème de l'inversion, c'est-à-dire en intégrant au moyen des fonctions elliptiques l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

jetaient les bases de l'étude des fonctions uniformes définies par des relations différentielles.

Pour discerner les équations dont les intégrales sont uniformes, il fallait chercher celles dont les intégrales n'ont de points critiques ni mobiles, ni fixes (ces deux parties du problème devaient être séparées, car on les traitait par des méthodes toutes différentes). Pouvait-on reconnaître sur l'équation elle-même, c'est-à-dire *autrement que par l'intégration*, l'absence de points critiques mobiles, et ainsi trouver dans la Théorie des fonctions, non seulement au point de vue spéculatif, mais en pratique, la méthode nouvelle dont nous parlons pour l'intégration des équations différentielles [1].

Fuchs, MM. Poincaré et Painlevé résolurent le problème pour les équations du *premier* ordre, du type $F(x, y, y') = 0$, où F est algébrique en y et y', et analytique en x. Fuchs détermina à quelles conditions leurs intégrales n'ont pas de points critiques *algébriques mobiles* [2], et dès lors, grâce au théorème de M. Painlevé relatif à la non existence de singularités *essentielles mobiles* dans les équations du premier ordre, on obtenait les conditions nécessaires et suffisantes pour que leurs points critiques soient fixes. Cette classe d'équations est très limitée, car

---

(1) Ni les résultats obtenus par M. Picard dans ses remarquables recherches, ni même ses prévisions n'étaient encourageants (cf. *A. M.*, t. XVII, p. 300).

Voici quelques Notes ou Mémoires où il s'est occupé des équations du *second ordre* à intégrale générale uniforme ou à points critiques fixes : *B. D.*, 1880; *J. M.*, 1889; *A. M.*, t. XVII et XVIII; *American Journal*, 1894; *C. R.*, 1880, 1886, 1887, 1892, 1893, 1895.

(2) *Sitzungsb. der A. zu Berlin*, 1884, p. 699.

peu après M. Poincaré montrait que les équations à points critiques fixes, et par suite, *a fortiori*, les équations à intégrale uniforme sont intégrables par des calculs algébriques ou des quadratures, ou bien se ramènent à une équation de Riccati ([1]). Ainsi, *pour le premier ordre*, la nouvelle méthode d'intégration ne conduit à l'intégration d'aucune équation nouvelle.

Ce qui compliquait la question pour les équations d'*ordre supérieur*, c'était l'existence de singularités essentielles mobiles : M. Painlevé a triomphé de cette difficulté ([2]). Parmi les équations du *second* ordre de la forme $y''=R(y',y,x)$, où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x, *il a déterminé explicitement toutes celles dont les points critiques sont fixes* et celles dont l'intégrale générale est uniforme ([3]). Puis il a montré que celles dont l'intégrale générale est une fonction uniforme *essentiellement nouvelle* se réduisent à trois types auxquels il a donné des formes canoniques simples. Toutes les équations de ces trois types se ramènent elles-mêmes (en négligeant les cas où l'intégrale est une fonction connue) aux cinq équations ([4])

$$y''=6y^2+x, \qquad y''=2y^3+xy+\alpha,$$

$$y''=\frac{y'^2}{y}+e^x(1-y^2), \qquad y''=\frac{y'^2}{y}+e^x(\alpha y^2+1)-e^{2x}y^2,$$

$$y''=\frac{y'^2}{y}+e^x(\alpha y^2+\beta)+e^{2x}\left(\frac{1}{y}-y^3\right).$$

([1]) Poincaré, *A. M.*, t. VII, p. 1; 1885.

Comme le raisonnement de Fuchs, mais à un point de vue différent, la méthode de M. Poincaré prêtait à des objections que M. Painlevé a signalées et résolues. (*Leçons de Stockholm*, p. 23-60, 443-462, et Introd., p. 9.)

On prouve d'abord que la seule équation du premier ordre et du *premier degré sans points critiques algébriques mobiles* est l'équation de Riccati ayant pour coefficients des fonctions uniformes de x.

([2]) *B. S. M.*, 1900, p. 201; *A. M.*, t. XXV, p. 1.

([3]) Il a également mis sur la voie de la solution pour les équations d'ordre supérieur.

([4]) M. Painlevé a démontré l'*irréductibilité absolue* de ces équations (*C. R.*, 1902, 2e semestre, p. 641, 757, 1020; 1903, 1er semestre, p. 189) au sens donné à ce mot par M. Drach (*A. E. N.*, 1898; *voir* aussi Painlevé, *B. S. M.*, 1900, p. 243); en d'autres termes, elles appartiennent, au point de vue de l'intégration *formelle* (par opposition à l'intégration obtenue au moyen de la théorie des fonctions), à la classe *la plus générale* d'équations de la forme $y''=R(x,y)$, R étant rationnel en x et y.

L'intégrale des équations canoniques de M. Painlevé est même *méromorphe*.

Par là, M. Painlevé a donné le *premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide des principes de la Théorie des fonctions,* sans qu'on sache les ramener à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures.

206. Nous avons rappelé que les transcendantes uniformes usuelles, sauf $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$, vérifient des équations différentielles algébriques du premier ordre simples : on sait leur rôle dans la Théorie des fonctions et dans l'intégration d'autres équations différentielles dont l'intégrale n'est plus uniforme. Peut-on attendre les mêmes services des transcendantes uniformes engendrées par les équations d'ordre supérieur dont nous venons de parler?

« D'une part, ... dans une étude systématique des équations à points critiques fixes du premier, du deuxième, du troisième ordre, toutes ces transcendantes (fonctions exponentielle, elliptiques, abéliennes, fuchsiennes) se mettraient en évidence d'elles-mêmes, si l'on en ignorait l'existence. Il apparaît donc comme bien peu vraisemblable que le champ des transcendantes remarquables engendrées par les équations différentielles soit dès maintenant épuisé. Mais d'un autre côté, les transcendantes uniformes qui jouissent (comme les fonctions elliptiques, fuchsiennes, etc.) de propriétés *exactes* très nombreuses doivent former une classe extrêment restreinte. C'est dans un autre ordre d'idées sans doute qu'on obtiendra des résultats généraux embrassant toutes les transcendantes nouvelles : il faudra... approfondir leurs propriétés *approchées* » (¹).

Comme exemple, reprenons les cinq équations canoniques de M. Painlevé : leur intégrale, avons-nous dit, est méromorphe, et dès lors représentable par le quotient de deux fonctions entières (n° **292**). M. Painlevé a montré qu'on peut choisir ces fonctions entières de manière à les ramener à des fonctions entières qui satisfont à une équation très simple du troisième ordre. S'il n'y a pas lieu d'espérer que ces transcendantes jouissent de propriétés

(¹) PAINLEVÉ, *A. M.*, t. XXV, p. 78.

fonctionnelles aussi élégantes que la périodicité, leur étude a déjà conduit à d'intéressants résultats au point de vue du genre, de la distribution des zéros, de la croissance pour $x = \infty$, etc. (n° **283**) ([1]).

§ III. — Équations linéaires aux dérivées partielles.

207. Les premiers *théorèmes d'existence* relatifs aux intégrales des équations aux dérivées partielles sont encore dus à Cauchy ([2]) : il les a démontrés d'abord pour les systèmes linéaires du premier ordre où les équations sont en même nombre que les fonctions inconnues et sont toutes résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions relatives à une même variable; il a cherché ensuite à réduire à de pareils systèmes certains systèmes d'ordre quelconque. Mme S. de Kowalevski, dans un Mémoire devenu classique, et M. Darboux ont précisé et étendu ses résultats, et simplifié ses démonstrations, sans prouver encore l'existence d'un système d'intégrales *dans les cas les plus généraux,* car un système différentiel arbitraire *n'est pas* réductible à la forme canonique de Mme de Kowalevski ([3]). Enfin, M. Delassus a introduit une forme canonique plus générale à laquelle il a pu ramener, par

---

([1]) En particulier, d'intéressants théorèmes de M. Boutroux sur les fonctions entières, spécialement concernant leur mode de croissance, permettent de *limiter supérieurement* les modules des fonctions entières dont nous venons de parler, et plus généralement de les étudier dans le domaine du point infini au point de vue de la croissance, du genre, etc. (*C. R.*, 1902, 1er semestre, p. 82, 153, 519).

([2]) *Cf.* divers Mémoires sur l'emploi du Calcul des limites (*C. R.*, 1842, 2e semestre, p. 44, 85, 141 ; 1843, 1er semestre, p. 572). Comme toujours, Cauchy établissait par cette méthode l'existence des intégrales et en donnait l'expression analytique.

Briot et Bouquet (*J. E. P.*, XXXVIe Cahier), Bouquet (*B. D.*, 1872, p. 265), Mayer (*M. A.*, t. V, p. 448) revinrent les premiers sur la question, et étudièrent les systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables provenant des équations aux différentielles totales.

([3]) Darboux, *C. R.*, 1875, 1er semestre, p. 101 et 317. — De Kowalevski, *J. de Crelle,* t. 80; 1875. Sa solution suppose que les équations données sont en même nombre que les fonctions, et que, $n_1, \ldots, n_m$ désignant respectivement les ordres des dérivées d'ordre le plus élevé des m fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_m$, les m équations renferment respectivement les dérivées $\frac{\partial^{n_1} y_1}{\partial x^{n_1}}, \ldots, \frac{\partial^{n_m} y_m}{\partial x^{n_m}}$ d'ordres $n_1, \ldots, n_m$ relatives à une même variable x, et sont résolues par rapport à ces dérivées. Or, il n'est pas toujours possible de trouver une transfor-

des changements de variables, un système différentiel quelconque à m variables : l'intégration du système, sous sa forme canonique nouvelle, est toujours possible, et elle se ramène à l'intégration successive de m systèmes de M[me] de Kowalevski, contenant successivement $1, 2, \ldots, m-1, m$ variables ([1]). Ainsi, au point de vue de la Théorie des fonctions analytiques, *les problèmes d'existence sont aujourd'hui complètement résolus* dans le cas général. Un peu avant M. Delassus, M. Riquier était parvenu à un résultat analogue ([2]).

Ici, nous nous contenterons des remarques élémentaires qui vont suivre.

Le système le plus général d'équations aux dérivées partielles

---

mation qui ramène un système différentiel général à cette forme canonique réduite, comme l'a montré M. Bourlet par un exemple simple (*A. E. N.*, 1891, S., p. 4 et 48).

Parmi les travaux où l'on s'efforça d'étudier les cas exceptionnels laissés de côté par M[me] de Kowalevski, signalons ceux de M. König (*M. A.*, t. XXIII; le système dont il démontre l'existence renferme, comme cas particulier, ceux de Kowalevski, Bouquet, Mayer), de M. Poincaré (*Thèse*, 1879), de M. Königsberger (*J. de Crelle*, t. 109, p. 261; t. 112, p. 181; *M. A.*, t. XLII, p. 485), de M. Staeckel (*J. de Crelle*, t. 119, p. 339), de M. Boehm (*M. A.*, t. LVI, p. 585).

([1]) Delassus, *A. E. N.*, 1896, p. 421.

Une question préjudicielle importante devait être résolue. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles défini d'une façon quelconque; c'est par exemple celui auquel on est conduit en résolvant des équations aux différentielles totales et en écrivant que les différentes expressions d'une même dérivée sont égales. Ce système peut renfermer un nombre *infini* d'équations. Ne regardons pas comme distinctes celles qui peuvent se déduire par différentiation d'un certain nombre d'entre elles : on doit se demander *s'il existe des systèmes compatibles comprenant un nombre illimité d'équations distinctes*. M. Tresse a prouvé que les équations analytiquement distinctes qui définissent un système compatible sont forcément en nombre *limité* : il existe un ordre fini s tel que toutes les équations d'ordre supérieur à s comprises dans le système se déduisent par de simples différentiations des équations d'ordre égal ou inférieur à s. (Tresse, *A. M.*, t. XVIII, p. 8. — Delassus, *A. E. N.*, 1896, p. 449.)

([2]) C'était la conclusion d'une série de travaux entrepris par M. Méray (*Nouveau précis d'Analyse infinitesimale*, p. 143; *J. M.*, 1880), par MM. Méray et Riquier (*A. E. N.*, 1889 et 1890; quelques résultats sont peut-être inexacts), par M. Riquier (*A. E. N.*, 1893 et *Savants étrangers*, t. XXXII; c'est là qu'est démontré le théorème général). *Voir* aussi : Riquier, *A. M.*, t. XXIII et XXV; *C. R.*, 1903, 1[er] semestre, p. 80. M. Riquier fait correspondre aux variables et aux inconnues des entiers qu'il appelle *cotes premières, cotes secondes*, etc., en déduit des *systèmes orthonomes*, et y ramène un système quelconque; sa démonstration assez compliquée ne semble pas naturelle.

d'ordre quelconque peut être remplacé par un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre : il suffit, comme dans la théorie des équations différentielles ordinaires, d'augmenter le nombre des fonctions en prenant comme inconnues auxiliaires les dérivées partielles considérées, sauf celles d'ordre le plus élevé, et d'introduire un nombre correspondant d'équations.

De plus, à une équation du premier ordre, non linéaire, on peut substituer un système d'équations linéaires par rapport aux dérivées. En effet, soit, par exemple, l'équation

$$F\left(x, y, z; u, v; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Aux fonctions u et v associons les inconnues auxiliaires u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 définies par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = v_3.$$

Pour que la fonction F soit identiquement nulle, il faut et il suffit qu'elle s'annule pour une valeur x_0 de x, et que sa dérivée par rapport à x soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$(f) \qquad F(x_0, y, z; u, v; u_1, u_2, \ldots, v_3) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = x_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} u_1 + \frac{\partial F}{\partial v} v_1 + \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v_3}\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0.$$

Cette dernière relation, associée à celles qui définissent $u_1, \ldots, v_3$, forme un système d'équations linéaires, qui peut remplacer l'équation donnée $F = 0$, pourvu que l'on tienne compte de la condition (f).

Ces remarques conduisent à discuter l'existence des solutions d'un système différentiel linéaire : nous prendrons le cas où le nombre des fonctions est égal à celui des équations, et où le système est résoluble par rapport aux dérivées partielles relatives à une même variable, x par exemple.

On ne diminue pas la généralité en supposant ces équations *homogènes* par rapport aux dérivées, car si l'une d'elles avait la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial y} + B\frac{\partial u}{\partial z} + C\frac{\partial v}{\partial y} + D\frac{\partial v}{\partial z} + E,$$

l'introduction d'une fonction auxiliaire w et de la relation $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, avec la condition initiale $(w)_0 = y$, permettrait de la rendre homogène, en multipliant E par $\frac{\partial w}{\partial y}$.

De même, on peut imaginer que les coefficients des dérivées partielles renferment seulement les *fonctions* inconnues, et non pas les variables indépendantes. En effet, un des coefficients ci-dessus $A(u, v, x, y, z)$, rentrera dans le type indiqué par l'introduction de fonctions nouvelles ξ, η, ζ et des équations ([1])

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, nous étudierons un système différentiel du premier ordre, linéaire et homogène, dont les coefficients ne renferment pas les variables indépendantes, et que *nous supposerons résolu par rapport aux dérivées relatives à une même variable*. Nous l'écrirons sous la forme

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial y_1}{\partial x} = \sum_{ik} a_{ik} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{\partial y_m}{\partial x} = \sum_{ik} l_{ik} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_k} \\ (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, p;\ m \text{ fonctions } y_i,\ p+1 \text{ variables } x, x_k) \end{array} \right.$$

et nous supposerons que les $m^2 p$ coefficients $a_{ik}, \ldots, l_{ik}$, qui dépendent seulement des m fonctions y_i, sont holomorphes dans un champ multiple formé de m cercles Γ ayant pour centres des points arbitraires donnés $y_1^0, \ldots, y_m^0$. Aux m fonctions inconnues y_i, on associe m fonctions arbitraires des p variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad \varphi_m(x_1, \ldots, x_p),$$

toutes holomorphes dans un champ multiple formé de p cercles C de centres $x_1^0, \ldots, x_p^0$, et égales respectivement à $y_1^0, \ldots, y_m^0$ au point $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$. (Nous supposerons désormais nulles les arbitraires initiales x_k^0, y_i^0.)

([1]) On imposera aux intégrales de ces équations de prendre, pour $x = 0$, les valeurs $\xi = 0$, $\eta = y$, $\zeta = z$, ce qui est permis d'après le théorème même que nous allons démontrer; dès lors, vu la forme des équations, les fonctions intégrales seront $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$.

Dans ces conditions, voici l'énoncé du théorème fondamental :

208. Théorème. — *Le système différentiel* (E) *admet un système de solutions* $y_1, \ldots, y_m$ (*dépendant des* $p+1$ *variables* x, $x_1, \ldots, x_p$) *holomorphes au point* $(0, 0, \ldots, 0)$ *et se réduisant pour* $x = 0$ *aux m fonctions* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Pour l'établir, servons-nous encore de la *méthode des limites*.

S'il existe des fonctions des $p+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_p$ régulières à l'origine et satisfaisant aux autres conditions de l'énoncé, on peut déduire des équations (E) leur expression sous forme de séries entières ordonnées suivant les puissances de la variable x. Les coefficients des puissances de x dans ces séries auront des valeurs déterminées, et, dès lors, le système de solutions sera unique. En effet, pour avoir les coefficients du développement de l'intégrale y_i, il suffit de connaître les valeurs à l'origine de toutes les dérivées du type

$$\frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_p} y_i}{\partial x^{\lambda}\, \partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_p^{\lambda_p}} \qquad (\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Celles qui correspondent à $\lambda = 0$ s'obtiennent en dérivant φ_i; car les fonctions y_i et φ_i doivent coïncider quand x est nul, et, d'autre part, étant donnée une fonction quelconque $\psi(x, x_1, \ldots, x_p)$, les dérivées $\left[\frac{\partial \psi(x, x_i)}{\partial x_i}\right]_{x=0}$ et $\frac{\partial \psi(0, x_i)}{\partial x_i}$ ont même valeur. Les autres se déduisent des relations (E), soit directement (dans le cas où $\lambda = 1$, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$), soit de proche en proche par dérivation, en utilisant les valeurs de dérivées déjà calculées. Les développements obtenus seront de la forme

$$(\alpha_i) \qquad y_i = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} x + \ldots + \alpha_{ni} x^n + \ldots \qquad (\alpha_{0i} = \varphi_i)$$

en représentant par α_{ni} des fonctions connues des variables $x_1, \ldots$, x_p, régulières à l'origine. Si ces séries y_i convergent, le raisonnement déjà fait pour les équations différentielles ordinaires (p. 19) montre qu'elles sont solutions des équations (E).

Pour établir leur convergence, procédons encore *par comparaison*. Supposons les $m^2 p$ fonctions données $a_{ik}, \ldots, l_{ik}$ holomorphes dans des cercles $|y_i| = \rho$; appelons N leur module maximum dans ces cercles (frontières comprises), et N′ le module

maximum des fonctions φ_i dans les cercles C de rayon r et sur leurs circonférences (ces fonctions φ_i s'annulent aux centres de ces cercles).

Aux m fonctions différentes φ_i substituons la fonction unique

$$\Phi = \frac{N'}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_p}{r}} - N',$$

holomorphe elle aussi dans les cercles C et nulle à l'origine, et introduisons la fonction

$$F(y_1, \ldots, y_m) = \frac{N}{1 - \frac{y_1 + \ldots + y_m}{\rho}},$$

qui est majorante relativement aux fonctions $a_{ik}, \ldots, l_{ik}$ (Ire Partie, p. 298). Enfin considérons, à la place du système (E), le système

$$(E') \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial Y_m}{\partial x} = \frac{N}{1 - \frac{Y_1 + \ldots + Y_m}{\rho}} \sum_{ik} \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}.$$

S'il admet des solutions $Y_1, \ldots, Y_m$, régulières au point

$$x = x_1 = \ldots = x_p = 0,$$

se réduisant pour $x = 0$ à la même fonction Φ, et, dès lors développables en séries de la forme

$$(\beta_i) \qquad Y_i = \beta_{0i} + \beta_{1i} x + \ldots + \beta_{ni} x^n + \ldots \qquad (\beta_{0i} = \Phi);$$

ces séries (β_i) seront majorantes vis-à-vis des séries (α_i), d'après le mode de formation des coefficients β_{ni}; car, pour obtenir les coefficients des séries β_{ni}, on procède comme pour obtenir ceux des séries α_{ni}, mais en employant les séries qui figurent dans les équations (E'), par suite des séries majorantes relativement aux séries $a_{ik}, \ldots, l_{ik}$, qui jouent le même rôle dans les équations (E). Donc, si les séries (β_i) convergent, le champ de convergence des séries (α_i) est au moins aussi étendu que celui des séries (β_i).

Or, l'intégration directe du système (E') prouve l'existence de ces solutions régulières (β_i). En effet, deux intégrales quelconques Y_i, Y_k sont identiques en vertu des équations (E') et de l'hypothèse sur les conditions initiales (leur différence ne dépend

pas de x, et elle doit être nulle pour $x = 0$, puisque alors chaque fonction doit se réduire à Φ). Dès lors, au lieu de s'occuper du système (E'), il suffit de considérer la seule équation

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{mN}{1 - \frac{mY}{\rho}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_p} \right),$$

et de prouver qu'elle possède une intégrale holomorphe au point $x = x_1 = \ldots = x_p = 0$, se réduisant à Φ quand x est nul. Posons $x_1 + \ldots + x_p = \xi$ et cherchons à satisfaire à cette équation par une fonction η dépendant uniquement de ξ et de x. La fonction η devra vérifier l'équation

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{mpN}{1 - \frac{m\eta}{\rho}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi},$$

et se réduire pour $x = 0$ à

$$\Phi = \frac{N'}{1 - \frac{\xi}{r}} - N' = \frac{N'\xi}{r - \xi}.$$

Appelons η_0 cette valeur initiale, et pour abréger posons

$$\zeta = \left(1 - \frac{m\eta}{\rho}\right)\xi + mpNx.$$

L'équation qui détermine η devient

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Donc ζ est fonction de η (p. 11), et nous pouvons écrire

$$\left(1 - \frac{m\eta}{\rho}\right)\xi + mpNx = \psi(\eta)$$

(avec la condition $x = 0$, $\eta = \eta_0$). Du reste, pour déterminer la forme de la fonction ψ, on a l'égalité

$$\psi(\eta_0) = \left(1 - \frac{m\eta_0}{\rho}\right)\xi = \left(1 - \frac{m\eta_0}{\rho}\right)\frac{\eta_0 r}{\eta_0 + N'}.$$

Ainsi, la fonction η est racine de l'équation du second degré

$$\left(1 - \frac{m\eta}{\rho}\right)\xi + mpNx = \left(1 - \frac{m\eta}{\rho}\right)\frac{\eta r}{\eta + N'}.$$

Cette équation a une racine et une seule qui s'annule avec x et ξ, et se réduit à Φ pour $x = 0$; c'est la seule que nous ayons à considérer. Elle est régulière au point $x = \xi = 0$; c'est donc aussi une fonction holomorphe de $x, x_1, \ldots, x_p$, dans le voisinage du point $(0, 0, \ldots, 0)$. Les séries (β_i) sont donc convergentes en ce point, et, *a fortiori*, les séries (α_i) (1).

Remarque. — L'énoncé du problème de l'intégration d'un système différentiel d'ordre quelconque est complété par des conditions initiales imposées aux solutions et à leurs dérivées : les transformations qu'on a fait subir au début aux équations changent

---

(1) Avec M. Picard (*Analyse*, t. II, p. 318), nous venons d'avoir recours pour cette démonstration aux procédés de Cauchy et aux propriétés des intégrales, tout en employant la fonction majorante de Weierstrass, plus simple que celle de Cauchy, pour établir que les séries (β_i) sont majorantes relativement aux séries (α_i).

Mme de Kowalevski, dans son Mémoire classique, ne fait appel qu'aux propriétés des séries et suit pas à pas la méthode de Weierstrass exposée plus haut *dans le texte* (p. 17). Montrons comment elle procède, en nous bornant au cas d'une seule équation

$$(e) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = a\frac{\partial y}{\partial x_1} + b\frac{\partial y}{\partial x_2} + \ldots + h\frac{\partial y}{\partial x_p} + l,$$

et, en supposant que ses coefficients $a, b, \ldots, l$ sont des fonctions données des seules variables $x, x_1, \ldots, x_p$, holomorphes dans des cercles ayant l'origine pour centre, et $(r, R, \ldots, R)$ comme rayons. Il faut établir l'existence d'une solution holomorphe au point $(0, 0, \ldots, 0)$, se réduisant pour $x = 0$ à une fonction holomorphe donnée de $x_1, \ldots, x_p$ (nous la supposerons nulle).

Soient

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l &= l_0 + l_1 x + \ldots + l_n x^n + \ldots, \end{aligned}$$

les développements suivant les puissances de x des coefficients donnés (les coefficients $a_i, \ldots, l_i$ sont eux-mêmes des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_p$ holomorphes à l'origine). Pour avoir une série

$$(\alpha) \qquad y = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots \qquad (\alpha_0 = 0),$$

satisfaisant *formellement* à l'équation (e), il suffit d'en déterminer les coefficients, fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_p$, au moyen de l'identité

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 x + \ldots = l_0 + l_1 x + \ldots + \sum (a_0 + a_1 x + \ldots)\left(x\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \ldots\right).$$

On en déduit d'abord la fonction α_1, et ensuite, de proche en proche, les fonctions $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$: on remarquera, comme ci-dessus, que les coefficients des

ces conditions en conditions nouvelles portant sur les intégrales cherchées et les fonctions auxiliaires introduites. Nous n'avons commencé à définir rigoureusement les conditions aux limites qu'en abordant l'intégration du système (E).

Quand il s'agit d'une seule équation d'ordre m à $p+1$ variables indépendantes, renfermant la dérivée d'ordre m de la fonction par rapport à une variable x et résolue par rapport à cette dérivée ([1])

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^m y}{\partial x^m} = f\left(x, x_1, \ldots, x_p, y, \ldots, \dfrac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_p} y}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}, \ldots\right) \\ (\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_p \overline{\overline{<}} m;\ \alpha < m), \end{array} \right.$$

---

variables $x_1, \ldots, x_n$, dans chaque fonction α_i, s'expriment au moyen d'un nombre fini de coefficients appartenant aux fonctions $a_1, \ldots, l_k$ et aux fonctions $\alpha_{i-1}, \alpha_{i-2}, \ldots$, *en additionnant ou en multipliant entre eux* ces coefficients.

Pour prouver la convergence de la série (α), introduisons la fonction

$$\frac{M}{\left(1 - \dfrac{x_1+\ldots+x_p}{R}\right)\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)}$$

(M désignant le module maximum des termes des séries $a, \ldots, l$ envisagées comme séries multiples) qui est majorante relativement à ces séries (I[re] Partie, p. 216) et considérons l'équation

$$(e')\qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x_1+\ldots+x_p}{R}\right)\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)}\left(1 + \frac{\partial Y}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_p}\right).$$

Une intégrale de cette équation, holomorphe à l'origine et s'annulant avec x,

$$(\beta)\qquad Y = \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n + \ldots,$$

sera, d'après les calculs qui en fourniront les coefficients, majorante relativement à la série (α); tout revient donc à démontrer l'existence d'une série *convergente* (β). Pour y parvenir, cherchons une solution η dépendant seulement de x et de ξ ($\xi = x_1+\ldots+x_p$), c'est-à-dire vérifiant l'équation

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{\xi}{R}\right)\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)}\left(1 + p\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right).$$

Pour prouver que cette fonction η existe il n'y a qu'à écrire l'équation ci-dessus sous forme de déterminant fonctionnel et à raisonner comme dans le texte.

([1]) *Cf.* De Kowalevski, Mémoire cité (*J. de Crelle*, t. 80, p. 12).

Cette supposition est *nécessaire*. Si, à l'hypothèse $\alpha < m$, on ne joint pas l'hypothèse $\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_p \overline{\overline{<}} m$, on peut encore, comme dans le cas du texte, déduire de proche en proche, de l'équation (1), les valeurs de y et de toutes ses

l'analyse précédente montre qu'en général une intégrale est *déterminée* dans un certain domaine lorsqu'on donne, pour une valeur de x, les valeurs de cette intégrale et de ses $m-1$ premières dérivées par rapport à x; ces m valeurs étant comme ci-dessus des fonctions régulières de $x_1, \ldots, x_p$ (1).

209. Revenons sur ce dernier problème pour en généraliser l'énoncé. Nous considérerons seulement le cas d'une équation du second ordre, que nous supposerons mise sous la forme

$$p_{nn} = f(x_1, \ldots, x_n, y, p_1, \ldots, p_n, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn-1})$$
$$\left(\begin{array}{c} p_k = \dfrac{\partial y}{\partial x_k},\ p_{ik} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i\, \partial x_k} \\ i, k = 1, \ldots, n \end{array}\right).$$

---

dérivées par rapport à x, en fonction de $x_1, \ldots, x_p$, pour une valeur particulière x_0 de x, dès qu'on suppose connues au point x_0 les valeurs de y et de ses $m-1$ premières dérivées par rapport à x, en fonction de $x_1, \ldots, x_p$. Par suite, on peut encore former une série procédant suivant les puissances de $x - x_0$, qui satisfait *formellement* à l'équation (1). Mais *cette série a, en général, un rayon de convergence nul.*

Mme de Kowalevski prend comme exemple un cas particulier de l'équation à quatre variables étudiée par Fourier dans la théorie de la chaleur; c'est l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Regardons-la comme résolue par rapport à $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. En vertu du théorème de Cauchy, elle admet une intégrale $F(x, t)$, holomorphe pour $t = 0$, qui se réduit en ce point, ainsi que sa dérivée, à des fonctions holomorphes de x, $f_1(x)$ et $f_2(x)$, arbitrairement choisies.

Regardons-la comme résolue par rapport à $\dfrac{\partial y}{\partial x}$. On peut encore former une série entière $\Phi(t, x)$ qui se réduit, pour $x = 0$, à une fonction arbitraire $\varphi(t)$ holomorphe pour $t = 0$ et satisfait formellement à l'équation; mais cette série est toujours divergente quand $\varphi(t)$ est pris arbitrairement.

Mme de Kowalevski a trouvé les conditions auxquelles devrait satisfaire la fonction $\varphi(t)$ pour que le développement Φ fût convergent (*J. de Crelle*, t. 80, p. 22).

Si l'on n'exigeait pas que la solution $\Phi(t, x)$ fût *analytique*, on pourrait la déterminer de telle sorte qu'elle prît, pour $x = 0$, la valeur arbitraire $\varphi(t)$.

L'équation ci-dessus, intégrée par Fourier, Poisson, Ampère (*J. E. P.*, t. X, XVIIe Cahier, p. 587) a été étudiée par Riemann, Schläfli (*J. de Crelle*, t. 72), M. Boussinesq (*Analyse*, t. II), M. Bourlet (Thèse, *A. E. N.*, 1891), M. Appell (*J. M.*, 1892, p. 187), etc.

(1) C'est ce que l'on veut exprimer quand on dit que l'intégrale générale d'une

Le problème que nous venons de traiter peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant donnés un ensemble de nombres $(x_i^0, y^0, p_k^0, p_{ik}^0)$ *dans le domaine desquels la fonction* f *est régulière, et deux fonctions* $\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *régulières au point* $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$, *on propose de trouver une intégrale* $y(x_1, \ldots, x_n)$ *de l'équation, telle que cette intégrale et sa dérivée première par rapport à* x_n *coïncident respectivement avec* φ_1 *et* φ_2 *sur le plan* $x_n = x_n^0$ (¹).

Au plan $x_n = x_n^0$, on peut substituer une surface ou *variété* quelconque $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ dont l'équation soit résolue par

---

équation d'ordre m à $p+1$ variables indépendantes dépend de m fonctions arbitraires de p variables.

Autrefois, on se préoccupait beaucoup du *nombre des fonctions arbitraires* qui entraient dans une intégrale générale : de là, l'embarras que l'on éprouvait en face de certains paradoxes. Reprenons l'équation de Fourier (note précédente). Son intégrale est complètement déterminée, qu'on l'assujetisse aux conditions initiales $f_1(x)$, $f_2(x)$, ou bien à la condition initiale $\varphi(t)$ (dans ce second cas, ou bien on ne suppose pas Φ analytique, ou bien on choisit convenablement φ). Ainsi, l'intégrale générale dépend d'*une* ou de *deux* fonctions arbitraires, suivant la manière de poser le problème.

Quand les intégrales F et Φ sont analytiques, le paradoxe disparaît, car l'ensemble de m fonctions holomorphes à p variables ne présente pas, au point de vue arithmétique, plus de généralité qu'une fonction holomorphe d'une seule variable : dans les deux cas, les coefficients forment un ensemble *dénombrable* (Iʳᵉ Partie, p. 15). Quand l'intégrale Φ n'est pas analytique, les deux problèmes posés sont différents.

Aussi, pour reconnaître si une intégrale est *générale,* il ne suffit pas de compter les fonctions arbitraires qui y figurent; il faut se reporter à la définition même et au criterium déduit des théorèmes de Cauchy. *Cf.* BOREL, *C. R.*, 1895, 1ᵉʳ semestre, p. 677; *Leçons sur la théorie des fonctions,* p. 132. — GOURSAT, *Équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. I, p. 31.

(¹) Notons que les conditions initiales p_i^0, p_{ik}^0 sont définies par les relations

$$p_i^0 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right)^0, \qquad p_{ik}^0 = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)^0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1);$$

$$p_{ni}^0 = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\right)^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

de plus, toutes les dérivées premières autres que p_n sont déterminées sur la variété $x_n = x_n^0$, puisque l'on a sur cette variété $y = \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et que d'autre part, pour tout déplacement, $dy = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n$.

rapport à x_n, et chercher une intégrale qui prenne sur cette variété, ainsi que sa dérivée par rapport à x_n, des valeurs déterminées [1]. Ainsi, une *multiplicité* initiale étant définie en se donnant arbitrairement x_n, y, p_n en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, le problème de Cauchy consiste à en déduire une *multiplicité intégrale* à n dimensions [2].

Enfin, plus généralement, étant donnée une surface ou *variété* analytique $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, on peut chercher une intégrale qui prenne sur cette surface, ainsi que l'ensemble de ses dérivées premières, des valeurs déterminées, ces valeurs initiales satisfaisant sur la surface $\psi = 0$ à la relation

$$dy = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n.$$

Tel est, sous diverses formes, le problème de l'intégration généralisé, au sens de Cauchy.

Le problème ainsi posé est en connexion étroite avec la Théorie des *caractéristiques*. On entend par là des *multiplicités singulières*, et spécialement des multiplicités d'éléments qui ne définissent pas une intégrale au sens de Cauchy, contrairement à ce qui arrive en général pour les multiplicités d'un même nombre de dimensions.

Précisons cette notion et, pour simplifier, considérons une équation *linéaire* du $n^{\text{ième}}$ ordre à *deux* variables indépendantes

$$(2) \qquad a_0 \frac{\partial^n y}{\partial x_1^n} + a_1 \frac{\partial^n y}{\partial x_1^{n-1}\, \partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial^n y}{\partial x_2^n} + \ldots = 0$$

et une courbe C du plan des $x_1 x_2$, sur laquelle nous nous donnons les valeurs de la fonction y et de ses dérivées, jusqu'à l'ordre $n - 1$. Le long de C, les n dérivées de y d'ordre $n - 1$

---

(1) En effet, sur cette variété, les autres dérivées premières $p_1, \ldots, p_{n-1}$ seraient également déterminées en vertu des relations

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0 = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

(2) On sait que, dans l'espace à n dimensions, on entend par ***surface***, par ***ligne***, par ***multiplicité ponctuelle*** ou variété ***à k dimensions*** des ensembles de points dont les coordonnées satisfont respectivement à *une seule* relation, à $n - 1$ relations, à $n - k$ relations.

sont des fonctions connues de x_1 ; par suite, il en est de même de leurs n dérivées

$$\frac{\partial^n y}{\partial x_1^{p+1}\partial x_2^q}+\frac{\partial^n y}{\partial x_1^p\partial x_2^{q+1}}\frac{dx_2}{dx_1}\qquad (p+q=n-1).$$

En tenant compte de l'équation (2), on a donc $n+1$ équations linéaires pour déterminer les valeurs, le long de C, des $n+1$ dérivées d'ordre n de y : elles ont un système unique de solutions, tant que le déterminant des inconnues est différent de zéro. Supposons une courbe C telle que, en tous ses points, ce déterminant soit identiquement nul, c'est-à-dire telle que l'on ait en tous ses points

$$(3)\qquad a_0\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\ldots+(-1)^n a_n=0\qquad \left(\lambda=\frac{dx_2}{dx_1}\right);$$

sur cette courbe, le problème de Cauchy est *indéterminé ou impossible :* une pareille courbe est dite *caractéristique* (¹). Ainsi, soit $\lambda_i(x_1, x_2)$ une racine de l'équation algébrique (3) : les n familles de courbes caractéristiques s'obtiendront en intégrant les n équations

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_i(x_1, x_2)\qquad (i=1, \ldots, n).$$

Cette notion de caractéristique conduit, dans le cas des équations à n variables, à la considération de multiplicités singulières à $n-1$ dimensions, jouissant de propriétés d'indéterminations analogues (²).

§ IV. — Problèmes de Dirichlet (³).

210. La définition d'intégrale générale étudiée dans les Paragraphes précédents supposait *analytiques*, au sens de la théorie

(¹) *Voir*, par exemple : Delassus, *A. E. N.*, 1895, S., p. 57 (il suppose les éléments réels).

(²) L'extension de la notion de caractéristique aux équations d'ordre supérieur au second et à plus de deux variables indépendantes peut être faite dans diverses directions suivant la propriété que l'on envisage : celle qui se rapporte au problème de Cauchy généralisé est due à Beudon (*C. R.*, 1897, 1ᵉʳ semestre, p. 671; *B. S. M.*, 1897, p. 108).

Cf. aussi : Goursat, *Équations aux dérivées partielles*, t. II, Chap. X, 1898. — Volterra, *A. M.*, t. XVIII. — Le Roux, *J. M.*, 1900. — Coulon, *Thèse*, 1902.

(³) Le Chapitre X complétera ce Paragraphe.

des variables *complexes,* les *éléments* des équations différentielles données et les *solutions* cherchées ([1]). Dès lors, si commode et si large que soit ce point de vue pour l'étude des problèmes d'existence, il faut l'abandonner un instant, soit pour considérer le cas où les données sont des fonctions de variables réelles, soit pour discuter, que les données soient analytiques ou non, ce qu'il y a d'arbitraire dans ces *conditions aux limites* qui complètent l'énoncé des questions d'intégration et examiner d'autres définitions intéressantes de l'intégrale générale (il y a une infinité de définitions possibles) ([2]). Les applications pourront servir de guide, indiquer en quels termes poser ces nouveaux problèmes d'existence et orienter vers leur solution. Précisons cette pensée sur un exemple fameux.

D'innombrables questions d'Analyse, de Géométrie, de Mécanique, de Physique conduisent à des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes *réelles,* du type

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Les plus simples sont les équations linéaires ou de Laplace

$$(1)\qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

$a, b, \ldots, f$ désignant des fonctions continues de x et y. Leur étude se présente sous des formes différentes suivant que l'on considère les domaines où leurs *caractéristiques,* c'est-à-dire les familles de courbes définies par la relation

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0,$$

sont *réelles ou imaginaires :* dans le premier cas ($b^2 - ac > 0$),

---

([1]) Dans les notes nous nous sommes déjà affranchi quelquefois de ces restrictions.

([2]) Voici comment Ampère définit l'intégrale générale (*J. E. P.*, XVIIe Cahier, p. 550) : « Pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'il n'en résulte, entre les variables que l'on considère et leurs dérivées à l'infini, que les relations exprimées par l'équation donnée et les équations qu'on en déduit en la différentiant. » Une intégrale qui est générale, au sens de Cauchy, l'est aussi au sens d'Ampère; M. Goursat a montré sur divers exemples que la réciproque n'est pas vraie (*Équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. II, p. 209).

les équations sont dites du type *hyperbolique*, elles sont du type elliptique dans le second (¹); quand $b^2 - ac$ est nul, on a le type *parabolique*. Ces trois types se réduisent respectivement, par une *substitution réelle* effectuée sur les variables x et y, aux formes canoniques (²)

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

$$(3)\qquad \Delta u + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0.$$

(¹) On retrouve ainsi, en se plaçant à un point de vue tout autre que celui de Cauchy, les courbes caractéristiques définies plus haut : de là, entre deux genres de problèmes bien différents, appartenant, l'un au domaine réel, l'autre au domaine complexe, un lien que rien ne faisait prévoir.

Cette classification des équations linéaires du second ordre à deux variables d'après la nature de leurs caractéristiques a été faite par Monge. Parmi les différences essentielles entre les équations des deux premiers types (*voir* n° 217), signalons ici la suivante : *toutes les solutions déterminées et continues des équations du type elliptique à coefficients analytiques sont analytiques* (variables réelles), tandis qu'en général, dans le cas du type hyperbolique, elles ne sont pas analytiques. (PICARD, *J. E. P.*, LXᵉ Cahier, p. 91; 1890; *C. R.*, 1900, 1ᵉʳ semestre, p. 1088; *A. M.*, t. XXV, p. 131. — *Cf.* aussi PARAF, *A. T.*, 1892, H., p. 72.) Par exemple, l'équation des cordes vibrantes (Iʳᵉ Partie, p. 150), a pour intégrale $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, les fonctions φ et ψ étant arbitraires et n'étant assujetties qu'à avoir des dérivées premières et secondes; elle a donc des solutions continues non analytiques.

M. Picard a étendu sa proposition aux équations linéaires aux dérivées partielles *d'ordre quelconque n à deux variables*, à coefficients analytiques : dans les régions où *toutes* les caractéristiques sont imaginaires, c'est-à-dire où l'équation en λ (p. 49) a *toutes* ses racines imaginaires, toute intégrale déterminée et continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n, est analytique (*C. R.*, 1895, 2ᵉ semestre, p. 12).

Pour les équations à plus de deux variables, prenons des cas particuliers. Soient les équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

et considérons leurs intégrales déterminées et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. Pour la première équation, ces intégrales sont analytiques; pour la seconde, elles ne le sont pas forcément.

Rappelons qu'une fonction est analytique, régulière ou holomorphe en un point (variables réelles), par exemple à l'origine, lorsqu'elle est développable en série multiple entière. Elle est analytique dans un domaine, lorsqu'elle est analytique en tout point intérieur.

(²) Un calcul facile montre que l'on est ramené, pour obtenir ces formes

Parmi les équations de Laplace du type elliptique, la plus célèbre (souvent même, on lui réserve exclusivement le nom d'*équation de Laplace*) est l'équation $\Delta u = 0$: elle se rencontre dans toutes les branches de la science. Elle y intervient de telle sorte qu'on est ramené à en *chercher une intégrale qui soit continue ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre dans un domaine fermé ne se recouvrant pas* (¹),

---

canoniques, à mettre l'élément linéaire $a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2$, suivant les cas, sous l'une des formes

$$\lambda\,dx\,dy, \quad \lambda(dx^2 + dy^2), \quad \lambda\,dx^2,$$

λ désignant une fonction de x et y et, par suite, au problème des *Cartes géographiques*. Sa solution n'exige donc que l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre (n° 324), qui coïncide ici avec celle des caractéristiques. *Cf.* par exemple PARAF, *A. T.*, 1892, H., p. 48.

Dans le cas particulier des équations du *type parabolique à coefficients constants*, le type réduit le plus important est celui de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ étudiée plus haut (*cf.* DU BOIS-REYMOND, *J. de Crelle*, t. 104).

(¹) De pareilles fonctions sont appelées *fonctions potentielles* ou *fonctions harmoniques*.

Comme tant d'autres notions, celle de fonction harmonique a été élargie (par exemple, on fait souvent abstraction de la discontinuité des dérivées secondes, *cf.* n° 307) ou modifiée. Ainsi, M. Poincaré désigne par là les fonctions u de deux variables qui, étant continues dans un domaine fermé $\mathfrak{D}$ ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, *satisfont à l'équation* $\Delta u + ku = 0$ *et sont nulles sur la frontière* C *de* $\mathfrak{D}$.

En ce sens, la seule fonction harmonique correspondant à des valeurs *négatives* du paramètre k est celle qui est nulle *dans tout le domaine* $\mathfrak{D}$. Relativement à tout contour C, il existe une fonction harmonique non nulle dans $\mathfrak{D}$, pour une infinité discontinue de valeurs *positives* (ou complexes) de k : chacune d'elles est dite la *caractéristique* de la fonction harmonique qu'elle engendre.

Voici pour quelle raison M. Poincaré appelle *harmoniques* ces fonctions. « Les divers sons simples que peut émettre une membrane sont caractérisés par des équations de la forme $\Delta u + ku = 0$, la fonction étant assujettie à s'annuler à la frontière. On sait que ces sons ont reçu le nom d'harmoniques. » Aux nombres caractéristiques k correspondent les divers sons que peut rendre la membrane. « M. Schwarz a démontré l'existence du son fondamental; M. Picard celle de la première harmonique; je démontre celle des harmoniques supérieures. » (POINCARÉ, *C. R.*, 1894, 1er semestre, p. 447.) Ces résultats s'étendent à l'espace. *Cf.* SCHWARZ, *Œuvres*, t. I, p. 241. — PICARD, *C. R.*, 1893, 2e semestre, p. 502. — POINCARÉ, *Rendiconti di Palermo*, 1894, p. 88. — ZAREMBA, *A. E. N.*, 1899, p. 449; *J. M.*, 1900, p. 47; *A. T.*, 1901, p. 1. — KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, nos 4 et 5, 1902. — DUHEM, *Leçons sur l'Hydrodynamique, etc.*, t. II, p. 152. — *Voir* aussi n° 313.

Les fonctions harmoniques ainsi entendues ont une grande analogie avec celles

et prenne sur sa frontière des valeurs données. Voici donc un problème d'existence que l'on devra traiter : c'est le *problème de Dirichlet* (¹).

Sa solution rentre d'autant mieux dans notre cadre que la Théorie des fonctions analytiques de variables complexes conduit précisément aussi à la recherche de pareilles fonctions. En effet, une fonction analytique uniforme $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$,

---

que M. Korn a appelées *fonctions universelles* (*C. R.*, 1903, 1ᵉʳ semestre, p. 30 et 148).

Dans le texte, nous laissons au mot *harmonique* son sens élémentaire.

Le problème de l'existence d'une fonction qui satisfasse dans (D) à l'équation $\Delta u + ku = 0$ et dont la *dérivée normale* s'annule sur C n'a aussi de solution relativement à chaque frontière C que pour une suite discontinue de valeurs de k. Au moins, par un raisonnement soumis aux mêmes objections que celui employé par Riemann pour établir le principe de Dirichlet, M. Poincaré a-t-il rendu ce théorème très vraisemblable (*American Journal,* 1890, p. 237. — *Cf.* aussi DUHEM, *Leçons sur l'Hydrodynamique, etc.*, t. I, p. 272 et 288).

(¹) On le retrouve dans la théorie de l'attraction (attraction newtonienne, attractions électriques et magnétiques), de la chaleur (propagation de la chaleur dans les milieux homogènes et isotropes, c'est-à-dire jouissant des mêmes propriétés dans toutes les directions), etc. *Cf.* POINCARÉ, *American Journal,* 1890, p. 211.

Comme problèmes d'existence analogues ou plus généraux, citons :

1° *Le problème de l'Hydrodynamique ou de Neumann :* il consiste à rechercher une fonction u harmonique dans un domaine (D) et dont la *dérivée normale* (vers l'intérieur ou l'extérieur du domaine, suivant qu'il s'agit du problème intérieur ou du problème extérieur) prenne sur sa frontière C des valeurs données φ.

On peut établir *directement,* par la méthode de Neumann, que le problème intérieur plan est possible lorsque l'intégrale $\int \varphi\, ds$, étendue à la frontière de (D), est nulle : c'est ce qu'a fait Robin (voir *infra*). On peut aussi passer de ce problème à celui de Dirichlet, et inversement, au moins quand le problème de Dirichlet a été résolu par la méthode de Neumann (sinon, il faudrait distinguer entre le plan et l'espace). Pour le problème extérieur, il n'y a pas de condition de possibilité.

(Prenons le cas de l'espace. Pour que le problème *intérieur* soit possible il faut et il suffit que l'intégrale $\int \varphi\, ds$, étendue à la frontière de (D), soit nulle. Le problème *extérieur* est toujours possible, pourvu que la fonction u s'annule à l'infini.) *Cf.* ZAREMBA, *J. M.*, 1902, p. 103. — STEKLOFF, *A. T.*, 1900, p. 240.

2° *Le problème électrostatique* ou de la distribution de l'électricité sur des corps bons conducteurs soustraits à toute influence extérieure.

Sa solution se ramène à celle d'un cas particulier du problème de Dirichlet (*voir* DUHEM, *Leçons sur l'Électricité,* t. I, p. 154; 1891), pourvu que l'on ait prouvé, en résolvant ce dernier problème, que la fonction obtenue a des *dérivées*

régulière dans un domaine fermé $\mathcal{D}$ à connexion simple, est déterminée par la suite continue de valeurs qu'elle prend sur la frontière C de $\mathcal{D}$ (Ire Partie, p. 280). *Ces valeurs ne peuvent être choisies arbitrairement,* puisque les valeurs de la fonction u déterminent à une constante additive près celles de v (Ire Partie, p. 51). On peut donc disposer *au plus* des valeurs de u : peut-on les prendre sur C d'une façon arbitraire; en d'autres termes, *existe-t-il une fonction harmonique dans le domaine* $\mathcal{D}$ *et prenant sur* C *une suite continue de valeurs données?*

Les considérations physiques qui amènent à poser ce problème font pressentir sa possibilité : même remarque pour les problèmes similaires. Par exemple, l'expérience ne permet guère de douter que l'équilibre électrique ne soit réalisable; donc l'équation qui

---

normales sur C. M. Liapounoff a montré que cette fonction possède dans des cas très généraux ces dérivées normales, lorsque la méthode de Neumann est applicable à $\mathcal{D}$ (*J. M.*, 1898, p. 241). Ainsi *le problème électrostatique est lui aussi possible. Cf.* STEKLOFF, *A. T.*, 1900, p. 225.

3° La recherche d'une fonction qui satisfasse dans $\mathcal{D}$ à une équation de la forme $\Delta u + k u + \psi = 0$ et qui vérifie, sur sa frontière, l'une des conditions aux limites

$$u = \varphi, \qquad \frac{du}{du} = \varphi, \qquad u = h\frac{du}{dn};$$

k et h sont des constantes données, φ et ψ sont des fonctions données de x et y (quand ψ est nul, le premier de ces problèmes est celui des membranes vibrantes dont nous venons de parler). Mêmes problèmes dans l'espace.

Il est assez facile de passer de l'un de ces trois problèmes aux deux autres (ZAREMBA, *J. M.*, 1902. — POINCARÉ, *B. D.*, 1902, p. 347).

C'est en substituant l'équation $\Delta u + ku = 0$ à l'équation $\Delta u = 0$ que M. Zaremba a pu étendre à l'équation $\Delta u = 0$ la méthode de Neumann dans le cas d'un domaine *à connexion multiple* de frontière quelconque (*voir* une des notes suivantes).

Parfois on désigne sous les noms de *premier, deuxième, troisième* problème de Dirichlet les problèmes qui consistent à chercher une fonction *harmonique* dans $\mathcal{D}$ (au sens élémentaire du mot) et telle que *ou bien u, ou bien* $\frac{du}{dn}$, *ou bien* $\frac{du}{dn} + hu$ (h étant un nombre négatif) prenne sur C des valeurs données. Les problèmes de Dirichlet généralisés sont les problèmes analogues relatifs aux équations de Laplace généralisées. Enfin, on est souvent conduit, en Physique mathématique, à des problèmes *mixtes*, c'est-à-dire tels que les valeurs de u soient données sur une partie de C, et celles de sa dérivée normale sur l'autre partie. (Sur ces équations, *cf.* HADAMARD, *Leçons sur la Théorie des ondes et les équations de l'Hydrodynamique,* 1904.)

exprime cet équilibre admet une solution. Cette équation n'est autre que l'équation $\Delta u = 0$, intégrée avec des conditions aux limites qui sont un cas particulier de celles de Dirichlet; donc, dans ce cas particulier, on a une *preuve physique* de la possibilité du problème de Dirichlet. Le cas général s'y ramène (p. 53, note).

Qu'un pareil raisonnement suffise dans une science qui, comme la Physique, part d'expériences toujours approximatives, puis les traduit en langage analytique par des équations, au moyen de considérations qui ne sont jamais d'une rigueur parfaite, on peut l'admettre. Évidemment ici nous ne saurions nous en contenter : de plus, une telle solution ne se prête pas au calcul. Étudions donc *analytiquement* les problèmes de Dirichlet.

Posés antérieurement à Dirichlet sous une forme à peu près équivalente par Green (1) (1828), par Gauss (2) (1839), et par Sir W. Thomson (1847), ils ont été précisés par Riemann (3). Si la méthode suivie par ce géomètre fait intervenir un mode de raisonnement peu rigoureux, c'est à lui néanmoins que revient la gloire d'avoir été l'initiateur et d'avoir montré la fécondité de

---

(1) *Essay on the application of mathematical Analysis*, 1828. — Voir *infra*, n° 315.

(2) *Œuvres*, t. V, p. 243.

(3) *Cf.* RIEMANN, *Dissertation inaugurale*, 1851 (*Œuvres*, trad. p. 36) et *J. de Crelle*, t. 54, p. 111.

En dehors de ses leçons orales, Dirichlet n'a rien *publié* sur les *problèmes* proprement dits; mais, avec Gauss, il s'est servi du mode de raisonnement employé plus tard par Riemann, pour obtenir d'importants théorèmes dans la théorie du potentiel. C'est à *ce procédé de raisonnement* lui-même que Riemann, en l'honneur de son maître, a donné le nom de *principe* de Dirichlet. Le principe ainsi entendu n'est rigoureux que si l'on admet un *postulatum* d'après lequel les problèmes ont toujours une solution (n° 216).

Parfois aussi, sous le nom de *principe* de Dirichlet, on entend le postulatum ou le théorème affirmant l'existence d'une solution.

Un peu avant Riemann, Thomson (*J. M.*, 1847, p. 496) avait fait usage du raisonnement en question (relatif à l'existence du minimum d'une intégrale, voir *infra* n° 216) à peu près sous la forme même employée par Riemann, et ainsi avait résolu le *second* problème de Dirichlet. De là le nom de *principe de Thomson* que les géomètres anglais donnent parfois au principe de Dirichlet.

La critique que nous ferons plus loin du principe de Dirichlet s'applique à tous les raisonnements analogues, par exemple à celui que l'on avait fait pour établir directement (par des considérations de minima) la possibilité de l'équilibre électrostatique.

la question ([1]). Aujourd'hui, on en possède plusieurs solutions à l'abri de toute objection, qui non seulement sont valables quand la frontière des domaines considérés est formée de courbes analytiques, mais que l'on vient d'étendre à des domaines quelconques, *quel que soit leur ordre de connexion et la nature de leur frontière.*

211. Nous nous bornerons ici aux procédés qui permettent de résoudre le problème de Dirichlet pour des domaines quelconques, ou du moins dans des cas très généraux; aussi nous n'insisterons pas sur les résultats obtenus par Lamé, Jacobi et Sir W. Thomson. Lamé et Jacobi ont montré le rôle que le *changement de variables,* spécialement le passage des coordonnées cartésiennes rectangulaires à des coordonnées curvilignes orthogonales, peut jouer dans l'intégration de l'équation $\Delta u = 0$; dans des cas particuliers, cette transformation rend l'intégration facile ([2]). Sir W. Thomson a tiré parti de la *transformation par rayons vecteurs réciproques :* grâce à elle, lorsqu'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour un domaine (dans le plan ou dans l'espace), on sait le résoudre pour tous les domaines que l'on en déduit par inversion ([3]).

Quant aux procédés généraux, nous les rangerons, par ordre de date, sous les titres suivants :

Méthode du passage à la limite par procédé alterné; elle est due à M. Schwarz ([4]).

([1]) Riemann faisait hardiment reposer sur ce principe son théorème de la représentation d'un domaine simplement connexe sur un cercle (plus généralement de la représentation d'un domaine appartenant à une surface de Riemann sur un polygone, proposition qui joue un rôle si important dans les travaux de MM. Poincaré et Klein), son théorème de l'existence d'une classe de courbes algébriques correspondant à une surface de Riemann à m feuillets donnée *a priori,* et sa grandiose Théorie des intégrales abéliennes.

([2]) Lamé, *J. M.*, 1837, p. 147; *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* 1839. — Jacobi, *J. de Crelle,* t. 36, p. 113. — *Voir* aussi, sur cette question et les suivantes, Duhem, *Leçons sur l'Électricité,* t. I, 1891.

([3]) Thomson, *J. M.,* 1845 et 1847; *voir* spécialement 1847, p. 276. Nous allons y revenir à propos du problème extérieur.

([4]) En voici le principe : supposons que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet pour deux contours convexes se coupant en deux points; on peut le

Méthode de la moyenne arithmétique ou de C. Neumann qui donne la solution cherchée sous la forme d'un *potentiel de double couche* (1).

---

résoudre pour le contour non convexe formé par l'ensemble des deux premiers (dans chaque contour, on supprime ce qui est intérieur à l'autre). Ainsi, de la solution du problème de Dirichlet pour deux domaines, on passe à sa solution pour une infinité de domaines résultant de la combinaison de domaines successifs (SCHWARZ, *Œuvres*, t. II, p. 133, 157, 303).

La première solution rigoureuse du problème de Dirichlet est celle que M. Schwarz a déduite de la représentation conforme (1870). Christoffel (*Annali di M.*, 1867 et 1870) et M. Schwarz (*Œuvres*, t. II, p. 65, 80, 108, 211; *N. A.*, 1897, p. 200) avaient obtenu la représentation conforme sur la surface d'un cercle d'aires limitées par des polygones ou des arcs de cercle (*voir* aussi SCHLÄFFLI, *J. de Crelle*, t. 78), et par suite avaient résolu le problème de Dirichlet pour ces polygones (nos 309 et 328). M. Schwarz prouva qu'en inscrivant dans une courbe convexe C des polygones dont les côtés tendent vers zéro, des méthodes de convergence déterminée donnent la représentation sur un cercle de l'aire limitée par C (Christoffel avait aussi étendu, par voie de limite, ses théorèmes de représentation à des domaines limités par des courbes de courbure continue, même quand cette continuité cesse en certains points; *Göttinger N.*, 1870, p. 283).

M. Schwarz montra ensuite que la région avoisinant un segment assez petit d'arc régulier de courbe analytique peut être représentée sur un plan d'une manière conforme, de telle sorte qu'à cet arc corresponde un segment de droite. Le *procédé alterné* lui permettait alors d'étendre sa solution aux domaines convexes ou non, limités par des arcs réguliers de courbes analytiques, quel que fût leur ordre de connexion.

Pour le plan, *cf.* PICARD, *Analyse*, t. II, p. 77 et 288. — J. RIEMANN, *A. E. N.*, 1888. — KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*. — Pour l'extension du procédé alterné à l'espace, *cf.* ZAREMBA, *A. E. N.*, 1897. — KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, n° 1; 1902.

(1) *Berichte der Sächsischen G. d. W.*, 1870; et surtout *Untersuchungen über das L. und N. Potential*, 1877; *Abhand. der Sächsischen G. d. W.*, 1887. *Voir* aussi *M. A.*, t. XI et XIII.

M. C. Neumann ne prouve la *convergence* des séries neumanniennes que dans le cas des domaines qui sont *convexes*, ou mieux ne sont jamais concaves [en ce cas, sa méthode a été simplifiée par Kirchhoff (*A. M.*, t. XIV, p. 179)]; mais il a indiqué une *méthode combinatoire*, qui correspond au *procédé alterné*, et permet de passer à des domaines quelconques en les divisant en domaines convexes.

La méthode de Neumann a été modifiée par M. Poincaré, qui l'a étendue (le principe de Dirichlet supposé démontré) *à tous les domaines simplement connexes*, convexes ou non (*A. M.*, t. XX, p. 59 : ce qui empêche la preuve de M. Poincaré de s'appliquer aux domaines d'un ordre quelconque de connexion, c'est qu'il fait usage d'une transformation non valable pour ces domaines); par M. Hilbert (NOBLE, *Göttinger N.*, 1896, p. 191; E.-R. NEUMANN, *M. A.*, t. LV, p. 4); par M. Stekloff qui l'étend, indépendamment cette fois du principe de Dirichlet et en s'affranchissant partiellement de la transformation de M. Poin-

Méthode du balayage, due à M. Poincaré (¹).
Méthode de Dirichlet-Hilbert.

Dans les méthodes de MM. Schwarz et Neumann, on forme une suite de fonctions harmoniques telles que leurs valeurs sur la frontière C du domaine $\mathfrak{D}$ considéré tendent vers les valeurs données. Inversement, dans la méthode du *balayage*, on détermine une suite de fonctions u prenant sur C les valeurs données, et telles que la suite des valeurs de Δu dans $\mathfrak{D}$ tende vers zéro.

Les méthodes de MM. Schwarz et Poincaré sont plutôt en elles-mêmes des démonstrations de la possibilité du problème de Dirichlet : celle de la *moyenne arithmétique* se prête d'une manière simple au calcul effectif de la solution ; elle en donne

---

caré, à tous les domaines fermés dans des cas très généraux (*A. T.*, 1900, p. 254) ; par M. Korn, qui emploie une combinaison des procédés de MM. Neumann, Schwarz, Poincaré (*Lehrbuch der Potentialtheorie*, 1899 et 1900).

Enfin, M. Zaremba, en s'affranchissant de la transformation de M. Poincaré (*J. M.*, 1902, p. 59) et M. Korn (*Abhandlungen zur Potentialtheorie*, 1902 ; *C. R.*, 1902, 2ᵉ semestre, p. 231 ; *voir* aussi p. 94) ont fait disparaître les dernières restrictions : *leur solution*, applicable à tous les domaines à connexion simple ou multiple, dont les frontières ont une courbure continue, *apparaît comme définitive au point de vue de la généralité*. M. C.-R. Neumann vient aussi d'étendre la méthode de Neumann aux domaines à connexion multiple dans des cas très généraux (*M. A.*, t. LVI, p. 49).

Sur les *fonctions fondamentales* que M. Poincaré a introduites, *cf.* ZAREMBA, *A. E. N.*, 1903, p. 1.

A la méthode de Neumann se rattache celle de Robin (*C. R.*, 1887, 1ᵉʳ semestre, p. 1834. *Cf.* les auteurs précédents, et LIAPOUNOFF, *J. M.*, 1898, p. 241 ; LE ROY, *A. E. N.*, 1898). Robin substitue des *potentiels de simple couche* ou potentiels de couches attirantes minces étalées sur un contour $\int \rho \log \frac{1}{r} ds$ aux *potentiels de double couche* $\int \rho \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds$ employés par Neumann (ρ est une fonction de l'élément d'intégration appelée *densité* ou *épaisseur*), et est conduit à intégrer l'équation $\Delta u = 0$ en prenant d'abord la condition aux limites $\frac{du}{dn} = \psi$. L'expression de potentiel de double couche est justifiée parce qu'on la regarde comme le potentiel dû à deux couches attirantes infiniment rapprochées l'une de l'autre, et telles qu'en deux points correspondants de ces couches les densités soient égales et de signes contraires, et d'ailleurs très grandes.

(¹) POINCARÉ, *American Journal*, 1890. — MM. Paraf (*A. T.*, 1892) et Le Roy (*A. E. N.*, 1897, p. 401 ; 1898) ont étendu et précisé cette méthode. *Cf.* aussi POINCARÉ, *Potentiel newtonien*. — PICARD, *Analyse*, t. II.

l'expression analytique sous forme de séries dites *séries de Neumann* (¹).

Ici, nous exposerons en détail la méthode de Neumann, et nous donnerons le principe de celle de Dirichlet-Hilbert.

212. On distingue le problème intérieur et le problème extérieur.

PROBLÈME INTÉRIEUR. — *Un domaine borné* $\mathcal{D}$ *à connexion simple ou multiple a une frontière* C *dont les points sont définis par les valeurs d'un paramètre* t (²); *une fonction de deux variables réelles prend sur cette frontière une suite*

(¹) Quant aux théorèmes d'existence relatifs aux équations de Laplace *généralisées* (spécialement aux équations $\Delta u + ku = 0$, $\Delta u - k^2 e^u = 0$) et à la détermination de leurs intégrales par des conditions aux limites de l'un des types ci-dessus, on a tenté d'y parvenir par les approximations successives, le balayage, le procédé alterné, l'extension de proche en proche d'un champ d'intégration d'abord très petit. *Cf.* SCHWARZ, *Œuvres*, t. I, p. 241. — PICARD, *J. E. P.*, 1890; *J. M.*, 1890, 1893, 1896, 1898, 1900; *A. M.*, t. XII et XXV. — POINCARÉ, *Rendiconti di Palermo*, 1894; *J. M.*, 1898. — PARAF, *A. T.*, 1892. — LE ROY, *A. E. N.*, 1897. — ZAREMBA, *J. M.*, 1897; *A. E. N.*, 1899. — LINDEBERG, *A. E. N.*, 1901. — STEKLOFF, *A. E. N.*, 1902.

Soit, par exemple, l'équation (3) (p. 51) : M. Picard a établi l'existence d'une solution prenant sur un contour *suffisamment petit* régulièrement analytique, une suite continue de valeurs données. Sa démonstration suppose seulement, ou bien que les coefficients d, e, f sont analytiques (*J. E. P.*, 1890; *A. M.*, t. XXV), ou bien que ces coefficients ont des dérivées premières continues et que la fonction donnée sur le contour a des dérivées des trois premiers ordres (*J. M.*, 1890 et 1900; *C. R.*, 1900, 1ᵉʳ semestre, p. 147). Il a fait ensuite l'extension de ses solutions par une sorte de méthode de prolongement analytique imitée du procédé alterné (*J. M.*, 1896, 1898; *A. M.*, t. XXV, p. 136). Son analyse s'étend à l'espace à trois dimensions.

La méthode des approximations successives a encore permis à M. Picard de former l'intégrale de l'équation (2) (p. 51) qui se réduit pour $x = x_0$ à une fonction donnée de y, et pour $y = y_0$ à une fonction donnée de x; ou bien encore celle qui se réduit pour $y = 0$ et $y = x$ respectivement à deux fonctions données de x (DARBOUX, *Surfaces*, t. IV, Note I). Dans le cas où les fonctions d, e, f sont analytiques (variables complexes) on prouve facilement l'existence de ces intégrales par la *méthode des limites;* mais un raisonnement direct est nécessaire, puisque l'équation n'est pas sous une forme où le théorème de Mᵐᵉ de Kowalevski (p. 40 et 45) est applicable.

(²) Pour abréger, nous désignerons chaque point de C par la lettre t elle-même. Les notations $\varphi(t)$, φ, $\varphi(a, b)$ serviront à représenter les valeurs d'une fonction respectivement en un point particulier t de C, sur le contour C, en un point (a, b) intérieur ou extérieur à C.

uniforme et continue de valeurs $\varphi(t)$ choisies arbitrairement [1]; *un point variable* A *intérieur au domaine a pour coordonnées a et b.*

On demande de former une fonction $u(a, b)$, uniforme et continue dans $\mathcal{D}$ *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, vérifiant l'équation de Laplace, et prenant sur* C *les valeurs* φ [*on veut dire par là que la fonction $u(a, b)$ doit tendre vers la valeur $\varphi(t)$, lorsque le point* A *tend vers le point t par un chemin* QUELCONQUE *intérieur à* $\mathcal{D}$].

PROBLÈME EXTÉRIEUR. — *Soit* $\mathcal{D}_e$ *la région extérieure à n courbes fermées* C_e *extérieures les unes aux autres, et dès lors s'étendant à l'infini dans tous les sens. On demande de former une fonction harmonique dans* $\mathcal{D}_e$, *et prenant sur sa frontière* C_e *des valeurs continues données* [2].

Toute transformation $(x, y; X(x, y), Y(x, y))$, qui permet de représenter deux domaines l'un sur l'autre d'une manière biunivoque et *conforme,* remplace une fonction $u(x, y)$ harmonique dans le premier domaine par une fonction $u_1(x, y)$ harmonique

---

(1) Dans une note précédente, nous disions qu'on est parvenu à étendre la solution du problème de Dirichlet à tous les domaines, quels que soient leur ordre de connexion et la nature de leur frontière. Peut-on à un autre point de vue en généraliser l'énoncé, et ne plus exiger que la suite $\varphi(t)$ des valeurs données soit *continue* sur C?

Supposons ce contour C *analytique* (n° 237). D'après un théorème de M. Painlevé (Ire Partie, p. 279, note), quand une fonction $u(a, b)$ est uniforme et continue dans un domaine $\mathcal{D}$ et prend une valeur *déterminée* $\varphi(t)$ en chaque point de sa frontière C, $\varphi(t)$ est fonction continue de l'arc; ainsi la fonction $\varphi(t)$ doit être continue le long de tout arc *régulier* de C. Si C a des singularités, la fonction $\varphi(t)$ peut passer brusquement d'une valeur *finie* à une autre valeur *finie* en un nombre limité de points singuliers τ. Dans ce dernier cas, le problème de Dirichlet est encore résoluble, en ce sens que l'on peut trouver une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, prenant les valeurs déterminées $\varphi(t)$ aux divers points t de C, sauf aux points τ, et n'ayant aux points τ aucune valeur déterminée d'avance : sa solution s'obtient par des modifications simples des méthodes signalées plus haut. (Pour le plan, *cf.* HARNACK, *Grundlagen, etc.*, p. 96. — J. RIEMANN, *A. E. N.*, 1888, p. 352. — Pour l'espace, *cf.* ZAREMBA, *A. E. N.*, 1897.)

(2) Le problème *intérieur* se pose de la même manière dans le plan et dans l'espace. Le problème *extérieur* a deux énoncés différents : dans l'espace, il consiste à former une fonction satisfaisant aux conditions ci-dessus et de plus *s'annulant à l'infini*.

dans le second (¹). Par suite, quand on sait représenter, l'une sur l'autre, d'une manière conforme, deux aires $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ simplement connexes, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour $\mathcal{D}_1$, on sait le résoudre pour $\mathcal{D}$ (²). On en conclut que les deux problèmes intérieur et extérieur sont équivalents : il suffira de s'occuper du problème intérieur (³).

(¹) En effet, soient v et v_1 les fonctions complémentaires de u et de u_1. Posons $u+iv=f(x+iy)$ et $X+iY=\varphi(x+iy)$. La transformation indiquée dans le texte, ou ce qui revient au même la transformation $(x+iy, X+iY)$ appliquée à la relation $u+iv=f(x+iy)$, donne

$$u_1+iv_1=f(\varphi(x+iy)),$$

ce qui prouve (Iʳᵉ Partie, p. 52) que la fonction u_1 est harmonique, puisque la fonction φ est analytique (n° 323) ainsi que la fonction f.

On pourrait aussi montrer, par un calcul direct, que Δu_1 et Δu ne diffèrent que par un facteur positif.

Quant au problème d'existence sur une surface de Riemann ouverte ou fermée de fonctions harmoniques dans un domaine, prenant sur sa frontière des valeurs données et admettant des périodes données, nous renvoyons au *Traité d'Analyse* de M. PICARD (t. II, Chap. XVI); cette question fondamentale y est résolue à l'aide du procédé alterné de M. Schwarz. Disons seulement en général que l'on peut étendre aux surfaces de Riemann la notion des fonctions harmoniques, leurs théorèmes d'existence, leurs développements en série, puisqu'une représentation conforme remplace une fonction harmonique par une fonction harmonique (*infra*, Chap. X).

(²) C'est un corollaire de la remarque précédente. *Cf.* SCHWARZ, *Œuvres*, t. II, p. 148. — J. RIEMANN, *A. E. N.*, 1888, p. 351. — DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 170.

(³) Parmi les transformations conformes permettant de ramener le domaine $\mathcal{D}_e$ à un domaine $\mathcal{D}$, ou inversement, on fait ordinairement choix avec Thomson de l'*inversion* (pour le cas de l'*espace*, ce choix s'impose, n° 328); c'est même ce qui conduit à poser différemment le problème de Dirichlet dans le plan et dans l'espace. Expliquons-en la raison.

Occupons-nous d'abord du plan. Prenons comme centre d'inversion un point intérieur au domaine $\mathcal{D}$ (nous supposons qu'on l'a ramené à l'origine) et comme puissance d'inversion l'unité. La transformation correspondante, c'est-à-dire la substitution

$$\left(x, y; \frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right),$$

où l'on a posé

$$x^2+y^2=r^2,$$

remplace le domaine $\mathcal{D}$ de frontière C par un domaine $\mathcal{D}_e$ de frontière C_e, et une fonction $u(x,y)$, harmonique dans $\mathcal{D}$ et se réduisant à $\varphi(t)$ sur C, par une fonction $u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ ou $u_e(x,y)$ harmonique dans $\mathcal{D}_e$ et égale à $\varphi_e(t)$ sur C_e. La fonction φ_e est bien déterminée sur C_e, puisque la correspondance biunivoque

Montrons ici qu'il admet une solution; nous verrons plus tard que cette solution est unique (nº 313) [1].

213. *Solution de M. Carl Neumann.* — Nous étudierons seulement le cas où le contour C est à connexion simple, a en chaque point une tangente déterminée et variant d'une manière continue (sauf peut-être en un nombre fini de points anguleux, où il y aurait deux tangentes) [2], et enfin est convexe, c'est-à-dire est coupé par une droite en deux points au plus [3].

Établissons d'abord quelques lemmes relatifs à l'intégrale de Gauss, et à cette intégrale généralisée.

Intégrale de Gauss. — Considérons une intégrale curviligne analogue à l'intégrale dite de Gauss, et posons

$$S_{CA} = \int_C \frac{\cos\omega}{r}\,ds = \int_C \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}\,ds,$$

---

entre les domaines s'étend à leurs frontières. Ainsi le problème de Dirichlet intérieur se ramène au problème extérieur et inversement. Notons qu'au point infini, qui est l'homologue du pôle de la transformation, la fonction $u_e(x, y)$ prend une valeur bien déterminée, puisqu'elle correspond à la valeur $u(0, 0)$.

Dans le cas de l'espace, si la fonction $u(x, y, z)$ est harmonique dans une sphère ayant l'origine pour centre, c'est la fonction

$$\frac{1}{r}\,u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = u_e(x, y, z) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 = r^2)$$

qui sera harmonique à son extérieur. Des lors, on est amené à faire correspondre à une fonction u, harmonique dans le voisinage de l'origine, une fonction u_e harmonique pour des valeurs très grandes de la variable et *qui s'annule à l'infini.*

Remarquons du reste qu'à l'infini les potentiels logarithmique et newtonien, dont nous dirons les rôles dans le plan et dans l'espace, ne se comportent pas de la même manière : $\log r^{-1}$ est infini et r^{-1} s'annule. (*Cf.* POINCARÉ, *Potentiel newtonien,* p. 192 et 199. — APPELL, *A. M.*, t. IV, p. 323.)

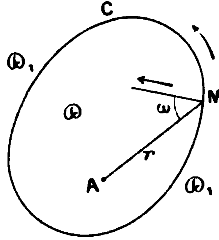
(1) Si toute démonstration rigoureuse de la possibilité d'un problème en est une solution, néanmoins cette solution est souvent impropre au calcul numérique: aussi nous distinguerons trois questions : la preuve de l'existence d'une solution, sa recherche effective, la preuve de l'existence d'une solution *unique* (des trois questions, cette dernière est, en général, la plus facile à résoudre).

(2) La démonstration montrera que le cas du triangle et celui du quadrilatère sont exclus; mais par plusieurs méthodes, par exemple par le procédé alterné, on peut la rendre applicable à ces cas.

(3) Par suite, nous pourrons profiter des simplifications apportées par Kirchhoff (p. 57, note). *Cf.* aussi PICARD, *Analyse,* 2ᵉ édit., t. I, p. 172.

r désigne la distance d'un point variable M du contour fermé C à un point fixe A (*fig.* 1); ω est l'angle de la normale intérieure à C avec la direction $\overline{MA}$; dn et ds sont les différentielles dans les

Fig. 1.



déplacements sur cette normale intérieure et sur le contour C. L'identité des deux expressions de S_{CA} résulte de la relation

$$dr = -\cos\omega\, dn.$$

Cette intégrale jouit des propriétés suivantes :

1° $\frac{\cos\omega}{r}ds$ est l'angle sous lequel on voit, du point A, l'élément ds; dès lors S_{CA}, somme des angles sous lesquels on aperçoit les éléments de C, a pour valeur 2π, π, 0, suivant que le point A est intérieur au contour C, sur ce contour, à son extérieur [1].

Par suite cette intégrale, considérée comme fonction des coordonnées (a, b) de A, est discontinue quand ce point traverse C.

2° Partageons le contour C en deux parties c et c'; soient t

---

[1] Si le contour a en un de ses points A' deux tangentes faisant un angle α (ce qui arrive par exemple quand des droites font partie de C), l'intégrale a pour valeur α au point A' $(\alpha < \pi)$.

Dans le cas de trois variables, les propositions ci-dessus deviennent les *lemmes de Gauss;* ce géomètre s'en est servi pour résoudre le problème de l'attraction des ellipsoïdes (*Mémoires de Göttingue,* 1813; *Œuvres,* t. V, p. 9). L'intégrale

$$\iint \frac{\cos\omega}{r^2}\, d\sigma,$$

étendue à une surface fermée S (ω est l'angle du rayon $\overline{MA} = r$ avec la normale intérieure, $d\sigma$ est un élément de surface) a pour valeur 4π, 2π, 0, suivant que le point A est intérieur au domaine limité par S, sur la surface S (au moins si elle a en ce point un plan tangent unique), extérieur à ce domaine.

et t' deux points choisis arbitrairement sur C. Posons

$$S_{ct} = \int_{c,t} \frac{\cos\omega}{r}\,ds, \qquad S_{c't'} = \int_{c',t'} \frac{\cos\omega}{r}\,ds, \qquad S = \frac{S_{ct} + S_{c't'}}{2\pi};$$

ces intégrales sont prises respectivement le long des courbes c et c', en supposant que le point (a, b) est venu sur C et y occupe respectivement les positions t et t'.

Je dis que S a une limite inférieure *positive,* et une limite supérieure *qui ne dépasse pas l'unité.* En effet, chaque intégrale S_{ct}, $S_{c't'}$ est inférieure ou égale à π, puisqu'elle prendrait la valeur π si on l'étendait au contour $c + c'$; donc S ne dépasse pas 1.

D'autre part, supposons d'abord le point t fixe sur C, et décrivons de t une petite circonférence Γ : elle intercepte sur C un arc que nous appellerons γ. Pour les points de C non situés sur γ, la quantité positive $\cos\omega$ dépasse toujours dans S_{ct} un nombre positif m, et la distance r n'atteint pas un nombre fixe M; on a donc

$$S_{ct} > \frac{m}{M}(c - \gamma).$$

Pour les mêmes raisons, on peut écrire

$$S_{c't'} > \frac{m}{M}(c' - \gamma'),$$

en prenant dans les deux inégalités pour m et M les mêmes nombres fixes. Donc, quand t et t' sont fixes sur C, S surpasse le nombre $\frac{m}{2\pi M}(C - \gamma - \gamma')$ [1]. Quand t et t' se déplacent sur C, l'ensemble de ces nombres a un minimum *positif* μ; ainsi on a bien

$$0 < \mu < S \overline{\overline{<}} 1.$$

214. *Intégrale de Gauss généralisée.* — Nous allons former une fonction, harmonique dans $\mathfrak{D}$ et tendant en chaque point de C

---

[1] Ce raisonnement est en défaut lorsque chaque somme S_{ct}, $S_{c't'}$ est nulle. En ce cas, les courbes c et c' doivent se réduire chacune à deux droites se coupant en t et en t' : le contour C est un triangle ou un quadrilatère. Nous devons supposer que l'on écarte ces deux cas particuliers.

vers une valeur bien déterminée, telle qu'elle puisse servir d'élément à une série permettant de résoudre le problème de Dirichlet.

Pour cela multiplions par la fonction donnée φ, définie et continue sur C, les éléments de l'intégrale S_{CA}; par suite considérons la fonction

$$\Phi(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi \frac{\cos\omega}{r} ds = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\varphi\, d\log\frac{1}{r}}{dn} ds$$

$$\left[r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right].$$

1° Cette fonction est continue, ainsi que ses dérivées partielles, à l'intérieur et à l'extérieur de C. Quand le point (a, b) vient sur ce contour, elle éprouve une discontinuité; mais on obtient une fonction continue en un point particulier t de C, par suite tendant vers la même valeur quelle que soit la manière dont le point (a, b) tende vers t, en lui substituant l'intégrale

$$\Psi(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C [\varphi - \varphi(t)] \frac{\cos\omega}{r} ds.$$

En effet, soit γ l'arc qu'intercepte sur C une circonférence Γ décrite du point t comme centre. Le rayon de Γ peut être choisi assez petit pour que, en tout point de γ, $|\varphi - \varphi(t)|$ soit inférieur à un nombre arbitraire ε.

Séparons l'intégrale Ψ en deux parties, relatives respectivement aux lignes γ et $C - \gamma$. La première est en valeur absolue inférieure à ε, quelle que soit la position du point (a, b) dans le plan; car son module augmente si l'on y remplace $\varphi - \varphi(t)$ par ε, ce qui permet de faire sortir le facteur ε du signe d'intégration, et de lui donner comme multiplicateur un nombre inférieur à l'intégrale de Gauss. La seconde intégrale est *dans le cercle* Γ une fonction continue de (a, b). Dès lors, on peut tracer un second cercle Γ_1, intérieur à Γ, tel que l'oscillation de la fonction $\Psi(a, b)$ dans le cercle Γ_1 n'atteigne pas un nombre donné à l'avance : donc $\Psi(a, b)$ est continue dans Γ_1.

Servons-nous de cette fonction $\Psi(a, b)$, continue au voisinage de t, pour obtenir une relation entre la valeur $\Phi(t)$ de la fonction Φ au point t, et les valeurs limites de $\Phi(a, b)$ quand le point (a, b) tend vers le point t en restant intérieur ou extérieur au contour C, valeurs limites que nous désignerons par Φ_i et Φ_e.

En décomposant l'intégrale Ψ en deux parties, on voit que sa valeur limite, quand le point (a, b) tend vers t, est $\Phi_i - \varphi(t)$; sa valeur au point t est $\Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)$. Par suite, à cause de la continuité de $\Psi(a, b)$, on a

$$\Phi_i - \varphi(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t) = \Psi(t),$$

c'est-à-dire

$$\Phi_i = \Phi(t) + \frac{1}{2}\varphi(t).$$

On obtient de même

$$\Phi_e = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t) = \Psi(t).$$

Cette dernière relation apprend aussi que $\Psi(t)$ est la valeur limite de $\Phi(a, b)$ lorsque le point (a, b) tend vers le point t en restant à l'extérieur de C.

2° *Cherchons une limite de l'oscillation de l'intégrale $\Phi(t)$ sur le contour* C.

Soient M et m le maximum et le minimum de la fonction φ sur ce contour. Partageons C en deux parties c et c' telles que, sur la portion c, la fonction φ oscille entre M et $\frac{M+m}{2}$; sur la portion c', elle sera comprise entre $\frac{M+m}{2}$ et m (c et c' peuvent se composer d'arcs séparés). De la définition de l'intégrale $\Phi(t)$, on déduit les inégalités

$$2\pi\,\Phi(t) \leqq M\int_{c,t}\frac{\cos\omega}{r}\,ds + \frac{M+m}{2}\int_{c',t}\frac{\cos\omega}{r}\,ds,$$

$$2\pi\,\Phi(t) \geqq \frac{M+m}{2}\int_{c,t}\frac{\cos\omega}{r}\,ds + m\int_{c',t}\frac{\cos\omega}{r}\,ds.$$

Reprenons les notations abrégées S_{ct}, $S_{c't}$ pour désigner ces intégrales, et rappelons la relation $S_{ct} + S_{c't} = \pi$ (p. 63). On en conclut par élimination

$$2\pi\,\Phi(t) \leqq \pi M - \frac{M-m}{2}S_{c't},$$

$$2\pi\,\Phi(t) \geqq \pi m + \frac{M-m}{2}S_{ct}.$$

On obtient deux inégalités analogues en remplaçant le point t par

un autre point t' de C. Leur combinaison donne

$$\Phi(t) - \Phi(t') \lessgtr \frac{M - m}{2}\left(1 - \frac{S_{c't} + S_{ct'}}{2\pi}\right).$$

Introduisons le nombre fixe μ, compris entre o et 1, défini plus haut (p. 64); on a finalement, quels que soient les points t et t' du contour,

$$\Phi(t) - \Phi(t') \overline{\overline{\lessgtr}} \frac{M - m}{2}(1 - \mu),$$

$1 - \mu$ étant compris entre o et 1. Donc, si l'on appelle M_1 et m_1 le maximum et le minimum de l'intégrale Φ sur le contour, on a, *a fortiori,*

$$M_1 - m_1 \overline{\overline{\lessgtr}} (M - m)(1 - \mu).$$

215. Ces lemmes établis, revenons à la méthode de Neumann, et formons, à l'aide d'une série de fonctions harmoniques de même type que $\Psi(a, b)$, la fonction harmonique $u(a, b)$ qui prend sur C les valeurs données φ. Posons

$$\varphi_1(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C [\varphi - \varphi(t)] \frac{d \log r}{dn} ds.$$

Cette fonction $\varphi_1(a, b)$, continue dans $\mathfrak{D}$, a une valeur déterminée $\varphi_1(t)$ quand (a, b) arrive par un chemin quelconque en un point déterminé t de C (p. 65); d'après la notation adoptée, appelons φ_1 l'ensemble des valeurs de $\varphi_1(t)$ sur C.

De cette fonction φ_1, déduisons comme ci-dessus une fonction $\varphi_2(a, b)$ au moyen de la relation

$$\varphi_2(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C [\varphi_1 - \varphi_1(t)] \frac{d \log r}{dn} ds,$$

puis une valeur $\varphi_2(t)$ et une fonction φ_2. La répétition du même procédé donne une suite de fonctions φ_p, dont l'ensemble permet de former l'intégrale

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C (\varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p + \ldots) \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds.$$

Je dis qu'elle résout le problème de Dirichlet.

D'abord son élément différentiel converge sur la courbe C. En effet, $\varphi_p(t)$ peut être regardée (p. 66) comme la limite de l'intégrale

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi_{p-1}\frac{d\log r}{dn}\,ds,$$

lorsque (a, b) tend vers le point t en restant à l'*extérieur* de $\mathfrak{D}$. D'un point B extérieur à $\mathfrak{D}$, menons les deux tangentes à la courbe convexe C : leurs points de contact divisent cette courbe en deux parties γ et γ', sur lesquelles $\cos\omega$ a des signes différents. La différence entre l'intégrale

$$\int \frac{d\log r}{dn}\,ds = -\int \frac{\cos\omega}{r}\,ds$$

étendue à la portion γ, et la même intégrale étendue à la portion γ' a pour valeur au signe près l'angle β des deux tangentes issues de B. Dans l'intégrale Φ, aux points de C où $\cos\omega$ est négatif (ce seront par exemple ceux de l'arc γ), remplaçons φ_{p-1} par son maximum M_{p-1} sur le contour C; sur l'arc γ', remplaçons-le par son minimum m_{p-1} ; enfin rappelons que β tend vers π, quand le point B tend vers le point t. On a ainsi

$$|\varphi_p(t)| < \frac{M_{p-1} - m_{p-1}}{2},$$

et dès lors, *a fortiori,* puisque l'on a une suite d'inégalités du type $M_1 - m_1 < (M - m)(1 - \mu)$, on en déduit

$$|\varphi_p(t)| < \frac{M - m}{2}(1 - \mu)^{p-1}.$$

Ceci prouve la convergence absolue et uniforme de la série $\sum \varphi_p$, puisque les modules de ses termes sont inférieurs à ceux d'une série numérique convergente; donc l'intégrale $u(a, b)$ a un sens.

Cela posé :

1° *$u(a, b)$ est harmonique.*

Pour l'établir, il suffit d'appliquer la règle de différentiation d'une intégrale par rapport à un paramètre, en remarquant que le potentiel logarithmique vérifie l'équation de Laplace.

2° *$u(a, b)$ tend vers la valeur* $\varphi(t)$, quand le point (a, b) tend vers t en restant à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

En effet, l'intégrale $u(a, b)$ étant de même type que l'intégrale $\Phi(a, b)$, on peut lui appliquer la formule $\Phi_i - \Phi_e = \varphi(t)$ (p. 66), et écrire

$$u_i - u_e = \varphi(t) + \varphi_1(t) + \ldots + \varphi_p(t) + \ldots.$$

Aussi, prouver que u_i a pour valeur $\varphi(t)$, c'est établir la relation

$$-u_e = \varphi_1(t) + \ldots + \varphi_p(t) + \ldots.$$

Prenons la valeur de u_e sous la forme

$$-u_e = \frac{1}{2\pi}\int_C (\varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p + \ldots)\frac{d\log r}{dn}ds$$

et transformons-la par la répétition de l'égalité

$$\varphi_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi_{p-1}\frac{d\log r}{dn}ds,$$

dont le second membre représente la limite de l'intégrale Φ quand le point (a, b) tend vers le point t en restant à l'extérieur de $\mathcal{D}$. La fonction $-u_e$ se transforme en $\varphi_1(t) + \ldots + \varphi_p(t) + \ldots$; c'est la justification du théorème (¹).

216. *Solution de Riemann-Hilbert.* — Pour avoir un langage plus concis, donnons à l'énoncé du problème de Dirichlet une forme géométrique.

En chaque point t de la frontière C du domaine $\mathcal{D}$, menons une perpendiculaire au plan de $\mathcal{D}$, et prenons sur elle une longueur égale à la valeur de la fonction donnée φ en ce point t. Le lieu des extrémités de ces perpendiculaires détermine une courbe gauche Γ : considérons les surfaces $z = f(x, y)$ qui passent par Γ, $f(x, y)$ désignant une fonction continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres (nous représente-

---

(¹) On étend à l'espace la méthode de Neumann en remplaçant le potentiel logarithmique $\log r^{-1}$ par le potentiel newtonien, et en substituant aux intégrales de contours et d'aires des intégrales d'aires et de volumes.

L'extension du principe de Dirichlet à l'hyperespace se fait soit par la méthode de Neumann (*cf.* RIQUIER, *Thèse*, 1886), soit par celle de M. Schwarz.

rons ces surfaces par S_f); s'il en est une pour laquelle la fonction $f(x, y)$ soit harmonique, appelons-la *surface harmonique.*

Le problème de Dirichlet consistera à déterminer une surface S_u définie par la relation $z = u(x, y)$, qui soit harmonique et passe par la courbe Γ (1).

Voici la solution qu'en avaient proposée Riemann et Dirichlet (2).

Considérons les intégrales

$$J(f) = \int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

étendues au domaine $\mathcal{D}$, relatives à toutes les surfaces S_f. On peut démontrer deux lemmes :

1° *Si parmi ces surfaces figure une surface harmonique* S_u, *l'intégrale* $J(u)$ *a une valeur moindre que toutes les autres intégrales* $J(f)$.

En effet, posons $f(x, y) = u(x, y) + \psi(x, y)$; il vient

$$J(f) = J(u) + J(\psi) + 2\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Transformons cette dernière intégrale I par la formule de Green (3)

$$(4)\quad I = \int\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_C \psi\frac{du}{dn}\, ds - \int\int \psi\, \Delta u\, dx\, dy.$$

(1) Ce problème d'existence de *surface harmonique* passant par une courbe gauche donnée se généralise en recherchant les *surfaces minima*, les *surfaces à courbure constante positive*, etc. assujetties à passer par une courbe donnée ou à toucher une surface annulaire le long d'une courbe fermée.

(2) *Cf.* RIEMANN (1851), *Œuvres*, trad., p. 36, et une Leçon de DIRICHLET, reproduite d'après les Notes de DEDEKIND (WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 49).

(3) Pour établir cette formule (4), on transforme chaque partie de I au moyen des identités

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \psi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \psi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

puis on ramène les intégrales curvilignes introduites par cette transformation à la forme voulue au moyen de la relation

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}$$

La fonction ψ est nulle sur le contour C et la fonction u est harmonique dans $\mathfrak{D}$; donc, l'intégrale I est nulle : dès lors, puisque $J(\psi)$ est positif, on a bien

$$J(f) > J(u).$$

2° *Réciproquement, si parmi les surfaces* S_f *il y en a une* S_u *pour laquelle l'intégrale* J *soit* MINIMUM, *cette surface est harmonique.*

En effet, posons cette fois $f = u + h\psi$, h désignant une constante arbitraire, et ψ une fonction nulle sur C et jouissant des mêmes propriétés de continuité que f. On a

$$J(f) = J(u) + h^2 J(\psi) + 2h \int\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Si cette dernière intégrale I n'est pas nulle, il suffit de donner à h une valeur convenable pour que le trinome $h^2 J(\psi) + 2hI$ soit négatif. Or, ce trinome ne peut être négatif, puisque $J(u)$ est un minimum; donc $I = 0$. Transformons I par la formule (4); la fonction ψ étant nulle sur C, on en déduit

$$I = -\int\int \psi\, \Delta u\, dx\, dy = 0.$$

Il s'ensuit que Δu est nulle dans tout le domaine $\mathfrak{D}$. En effet, si en un point (x_0, y_0) de $\mathfrak{D}$, et, dès lors, dans un cercle c décrit de ce point comme centre avec un rayon r, Δu n'était pas nulle, on pourrait définir la fonction arbitraire ψ, qui remplace la fonction arbitraire f, par la condition

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{entre } c \text{ et C}, \\ [r^2 - (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^m & \text{à l'intérieur de } c \qquad (m \text{ entier} > 2), \end{cases}$$

car la fonction ψ ainsi définie est continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et elle s'annule sur C. Or, pour une telle fonction ψ, l'intégrale I n'est pas nulle; il faut donc que dans c, et par suite dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, on ait $\Delta u = 0$.

Ces lemmes admis (et nous venons de les démontrer en toute rigueur), voici comment poursuivaient Riemann et Dirichlet.

Quelle que soit la surface S_f, l'intégrale correspondante $J(f)$ est positive; dès lors, elle a une *limite inférieure* (Ire Partie,

p. 26), elle-même *positive*. Soit S_u la surface correspondante, et par suite la surface pour laquelle l'intégrale J est *minimum;* en vertu du dernier lemme, cette surface est harmonique, ce qui prouve que la fonction $u(x, y)$ résout le problème de Dirichlet.

Weierstrass a repris les objections faites depuis longtemps à ce raisonnement (ce sont les objections habituelles relatives à la continuité des fonctions définies par le calcul des variations) et mis nettement en évidence le point qui manque de rigueur ([1]). Le voici :

La *limite inférieure* dont on vient de parler peut ne pas être *positive,* car un ensemble infini de nombres tous positifs n'a pas forcément une limite inférieure positive (Ire Partie, p. 35); serait-elle positive, que l'on ignore si l'intégrale peut atteindre cette limite (on sait seulement qu'elle s'en approche autant que l'on veut) : *a fortiori,* rien ne prouve que cette limite corresponde à un minimum.

Récemment, par un ingénieux procédé, M. Hilbert est parvenu à « ressusciter le principe de Dirichlet » et à rendre rigoureux le mode de raisonnement des éminents géomètres ([2]).

([1]) Les contemporains de Riemann se contentaient souvent de l'intuition physique d'un résultat; aussi on admettait comme suffisant le genre de raisonnement du texte; dans des cas analogues, Gauss et Dirichlet n'avaient pas poussé plus loin. Ici, l'intuition de Riemann fut doublement heureuse, puisque par la suite elle fut justifiée en toute rigueur, et que dès cette époque elle lui permit d'édifier sa belle théorie des fonctions abéliennes : par exemple, c'est de la possibilité du problème de Dirichlet que Riemann a déduit l'existence de fonctions algébriques (et de leurs intégrales) correspondant à une surface de Riemann donnée à l'avance d'une façon arbitraire.

Pour la critique du raisonnement, *cf.* WEIERSTRASS (1870), *Œuvres,* t. II, p. 49. — SCHWARZ (1869), *Œuvres,* t. II, p. 83. — HEINE, *J. de Crelle,* t. 71, p. 360; 1870; *M. A.*, t. IV, p. 626, etc. — PICARD, *Analyse,* t. II, p. 38. — HADAMARD, *Leçons sur la Théorie des ondes, etc.*, 1904, p. 9.

([2]) *Jahresbericht der D. M. V.*, t. VIII, p. 117; 1899 (trad. *N. A.*, 1900). Voici presque textuellement la Note qui résume sa démonstration : le détail n'en a pas encore été publié.

Supposons que le contour C ait des tangentes et une courbure continues, et que la fonction φ donnée soit continue sur C. De toute surface $z = f(x, y)$ ou S_f, analytique ou formée de portions de surfaces analytiques, et passant par Γ, on peut toujours déduire une surface $z = \hat{f}(x, y)$ ou $S_{\hat{f}}$, telle que l'intégrale $J(\hat{f})$ ne dépasse jamais l'intégrale correspondante $J(f)$ et qu'en même temps $S_{\hat{f}}$ n'ait

217. Terminons par quelques généralités analogues à celles que l'on a rencontrées plus haut (p. 27).

Une fonction analytique de deux variables *réelles* peut être prolongée analytiquement en dehors du domaine de convergence de la série de puissances qui la définit; de là, la notion de point singulier et de ligne singulière essentielle, considérés comme *obstacles* au prolongement ([1]). L'étude d'une pareille fonction et

---

en aucun point de tangente faisant avec le plan des xy un angle supérieur à un angle ω lié comme il suit à la courbe Γ.

Considérons les points où la surface S_f fait avec le plan des xy un angle qui ne dépasse pas une limite fixe; on peut prouver que, dans le voisinage de ces points, il est possible de remplacer la surface $z = f(x, y)$ par un morceau soit du plan $z = ax + by + c$, soit (sur le contour) de la surface harmonique en forme d'entonnoir $z = \dfrac{a(x+\alpha)+b(y+\beta)}{(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2} + c$, tel que, sur ces morceaux, le plan tangent ou les tangentes fassent avec le plan des xy un angle moindre que le plan tangent ou les tangentes aux points correspondants de S_f (pour cela, on détermine convenablement les constantes a, b, c, α, β). De là, des surfaces $S_{\hat{f}}$ sur lesquelles les angles dont on a parlé n'atteindront pas une limite ω; par suite. sur ces surfaces, on a

$$\text{arc tang}\sqrt{\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}\right)^2} < \omega.$$

Cela posé, soit j la limite inférieure des intégrales $J(f)$ relatives à toutes les surfaces S_f; parmi ces surfaces, cherchons celles pour lesquelles les intégrales correspondantes $J(f_1), J(f_2), \ldots$ tendent vers la limite j. A cet effet, remplaçons les surfaces S_{f_1}, S_{f_2}, ... respectivement par les surfaces $S_{\hat{f}_1}$, $S_{\hat{f}_2}$, ..., et cherchons dans la suite infinie de fonctions $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots$ une suite infinie de fonctions $u_1, u_2, \ldots$ qui en tous les points (x, y) de $\mathfrak{D}$ à coordonnées rationnelles tendent vers une limite, limite que nous appellerons $u(x, y)$. Comme on a, en tous les points de $\mathfrak{D}$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| < \operatorname{tang}\omega, \qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| < \operatorname{tang}\omega \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on en déduit que la suite $u_1, u_2, \ldots$ converge uniformément, dans $\mathfrak{D}$ et sur C, vers sa limite u; par suite, $u(x, y)$ est fonction continue dans $\mathfrak{D}$ et sur C.

On en conclut que la surface $z = u(x, y)$ est la surface harmonique cherchée. soit directement, soit plus simplement en s'appuyant sur l'existence de la fonction minima, c'est-à-dire sur la solution du problème de Dirichlet, pour le cercle et une fonction continue quelconque sur le contour.

([1]) Comme dans le cas des fonctions de variables complexes, les lignes singulières *essentielles* sont des lignes au delà desquelles le prolongement est impossible.

Nous donnerons quelques explications relatives au prolongement des fonctions analytiques de variables *réelles* en traitant des fonctions harmoniques (n° 316).

la recherche de son domaine d'existence conduisent donc à étudier sa frontière, c'est-à-dire les points singuliers et les lignes singulières de la fonction.

Dès lors, si l'on considère une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients analytiques, le problème de son intégration se ramène en un sens à la recherche des lignes singulières essentielles de l'intégrale qui correspond à des conditions initiales analytiques données. Ne peut-on pas faire, *a priori*, l'étude de ces lignes, reconnaître celles qui apparaissent sur l'équation elle-même et par suite sont *fixes*, savoir quelque chose des lignes essentielles mobiles ?

La théorie des *caractéristiques* joue un rôle important dans la solution de ce problème : elle conduit à partager, pour chaque équation, le plan en trois régions d'après la nature de leurs caractéristiques. La première région $\mathcal{D}_r$ est celle où *toutes* les caractéristiques sont *réelles;* la seconde $\mathcal{D}_i$ celle où toutes les caractéristiques sont imaginaires; la troisième $\mathcal{D}_{ri}$ celle où il y en a à la fois de réelles et d'imaginaires.

Dans la région $\mathcal{D}_i$, *les lignes singulières essentielles des intégrales analytiques peuvent être des lignes absolument arbitraires;* ces lignes *mobiles* ne sont jamais des caractéristiques. En effet, ce théorème est évident pour l'équation $\Delta u = 0$, puisqu'on apprend, en résolvant le problème de Dirichlet, à former une intégrale analytique dans un domaine de frontière quelconque. Il en est de même pour l'équation générale linéaire du second ordre à deux variables, puisqu'elle a *toutes* ses intégrales analytiques (p. 51, *note*).

Dans la région $\mathcal{D}_r$, les lignes singulières essentielles *fixes* des intégrales analytiques sont les lignes singulières essentielles de ses coefficients, les lignes le long desquelles les coefficients des termes d'ordre n s'annulent simultanément, ainsi que les lignes singulières essentielles des racines de l'équation caractéristique, à l'exception des lignes polaires de ces racines. *Les lignes singulières essentielles mobiles ne peuvent être que des caractéristiques* de l'équation. Les points singuliers isolés sont fixes ou mobiles; les points singuliers *mobiles* sont situés sur les lignes singulières fixes.

Enfin, dans la région $\mathcal{D}_{ri}$, les intégrales analytiques peuvent avoir, comme dans la région $\mathcal{D}_i$, des lignes singulières absolument quelconques; mais ces lignes mobiles peuvent être caractéristiques ou non caractéristiques ([1]).

([1]) DELASSUS, *C. R.*, 1894; *A. E. N.*, 1895, S. et 1896, p. 363. — LE ROUX, *A. E. N.*, 1895, p. 269.

Une remarque très simple permet d'étendre la plupart de ces résultats aux *systèmes* d'équations linéaires aux dérivées partielles (*A. E. N.*, 1896, p. 339).

CHAPITRE VII.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES PROPRIÉTÉS FONCTIONNELLES.

218. Une voie naturelle pour introduire des fonctions analytiques intéressantes, utiles en Analyse, en Géométrie et en Mécanique, aussi bien que pour en obtenir le prolongement analytique, consiste à avoir recours aux *équations fonctionnelles*. On entend par là des relations entre des variables indépendantes, certaines fonctions de ces variables et les valeurs qu'elles acquièrent lorsqu'on effectue sur les variables des substitutions données. Sans songer à traiter ici dans sa généralité cette question difficile, peut-être est-il bon de préciser la manière dont elle se pose et de rappeler des problèmes classiques où les fonctions s'introduisent par ce moyen.

A la fin du XVIIIe siècle, Vandermonde et Kramp étudièrent des fonctions de trois variables $f(u, x, y)$ définies, pour des valeurs *entières et positives* de y et des valeurs *arbitraires* de x et u, par cinq propriétés fonctionnelles simultanées. L'analogie de ces fonctions et de la fonction u^y fit croire à Kramp qu'il se trouvait des fonctions satisfaisant aux mêmes relations pour *toutes les valeurs* de y : de là le nom de *facultés analytiques* qu'il leur donna. De fait, de pareilles fonctions ne peuvent exister, comme l'ont montré Bessel, Crelle, Weierstrass (¹).

Abel et Cauchy résolurent plusieurs équations fonctionnelles (²). Le premier exemple traité par Abel est celui de la recherche des

(¹) *Cf.* VANDERMONDE, *Mémoire sur des irrationnelles* (*Mémoires de l'Ac.*, 1772). — KRAMP, *Analyse des réfractions astronomiques*, 1798. — BESSEL, *Königsberger Archiv*, 1812, et *Œuvres*, t. II, p. 342. — CRELLE, *J. de Crelle*, t. 7. — MÜLLER, *J. de Crelle*, t. 11. — ŒTTINGER, *J. de Crelle*, t. 33, 35, 38, 44, et *surtout* WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. I, p. 87 et 153.

(²) ABEL, *Œuvres*, t. II. — CAUCHY, *Œuvres*, 2ᵉ série, t. III, p. 98 et 220.

solutions de l'équation $f^2(x)=f(2x)+2$; il montra qu'elles étaient de la forme $f(x)=a^x+a^{-x}$ (¹).

L'équation fonctionnelle de Poisson

$$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y) \tag{1}$$

qui ramène à un seul et même problème la Théorie des fonctions circulaires, la Statique (en permettant de justifier la règle du parallélogramme des forces), la recherche des propriétés métriques dans les trois géométries euclidienne et non euclidiennes, se résout comme il suit (²). Dérivons-la deux fois par rapport à x, deux fois par rapport à y, et comparons les résultats; il vient

$$f''(x)=\mathrm{C}f(x) \qquad \text{(C désignant une constante).}$$

L'intégrale générale de cette équation a l'une des formes

$$f(x)=a\cos mx+b\sin mx, \qquad f(x)=a'e^{mx}+b'e^{-mx}.$$

En vertu de la relation (1), la fonction f est paire; on a donc

$$b=0, \qquad a'=b'.$$

Les constantes a et a' se déterminent alors en portant les intégrales ci-dessus dans l'identité (1); d'où finalement les solutions

$$f(x)=\cos mx, \qquad f(x)=\operatorname{ch} mx.$$

Comme fonctions intéressantes, citons encore les fonctions analytiques uniformes $f(x)$ définies par l'une des relations fonctionnelles (Iʳᵉ Partie, p. 64)

$$f(x+2\omega)=f(x), \qquad f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=f(x), \qquad f[\varphi(x)]=f(x),$$

c'est-à-dire les fonctions périodiques, les fonctions automorphes, les fonctions périodiques généralisées. Mentionnons enfin la fonction eulérienne, que l'on peut regarder comme définie, pour les

(¹) ABEL, *Œuvres*, t. II, p. 38.

(²) Cette méthode suppose que la fonction f a des *dérivées première et seconde :* M. Andrade a résolu l'équation (1) en s'appuyant uniquement sur la *continuité de la fonction f* (*B. S. M.*, 1900, p. 58).

valeurs de x dont la partie réelle est positive, par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (t \text{ réel}),$$

et prolongée dans le plan au moyen de l'équation fonctionnelle ([1])

(2) $$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

à laquelle elle satisfait dans le domaine où elle est définie directement.

219. Tous ces problèmes rentrent dans celui d'Abel. Abel se propose, étant données une constante quelconque a et une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans un domaine, de déterminer les fonctions $f(x)$ telles que l'on ait

(3) $$f[\varphi(x)] = f(x) + a.$$

On peut mettre cette relation sous l'une des formes

(4) $$e^{f[\varphi(x)]} = e^{f(x)+a}, \qquad F[\varphi(x)] = A\,F(x)$$

indiquées par M. Schröder ([2]).

([1]) C'est même sur les propriétés fonctionnelles de $\Gamma(x)$ que s'appuie M. Hölder pour prouver que cette fonction n'est solution d'aucune équation différentielle algébrique ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de x (*M. A.*, t. XXVIII, p. 1).

Weierstrass a montré (*Œuvres*, t. I, p. 193) que la fonction eulérienne est aussi caractérisée par la relation (2), associée aux équations

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!\, n^x} = 1.$$

En Géométrie infinitésimale, les équations fonctionnelles se rencontrent constamment et prennent les formes les plus diverses. *Cf.* Darboux, *Théorie des surfaces*.

([2]) Abel, *Œuvres*, t. III, p. 36. — Schröder, *M. A.*, t. II et III. — Rausenberger, *M. A.*, t. XVIII, XX, XXI, XXV. — Korkine, *B. D.*, 1882.

MM. Kœnigs (*B. D.*, 1883, p. 340; *A. E. N.*, 1884 et 1885), Grévy (*A. E. N.*, 1894 et 1896), Leau (*A. T.*, 1897, E.) ont résolu les équations (3) et (4), en se bornant aux fonctions $\varphi(x)$ holomorphes dans le voisinage d'une racine de l'équation $x = \varphi(x)$.

De même la recherche des fonctions périodiques de troisième espèce généralisées conduit à l'équation

$$f[\varphi(x)] = \psi(x) f(x);$$

les fonctions φ et ψ sont données, la forme des fonctions f est inconnue.

Quant au problème général, on peut lui donner l'énoncé suivant :

Considérons n variables indépendantes sur lesquelles on effectue des substitutions données; quelle doit être la forme d'une fonction de ces variables pour qu'il y ait une relation donnée entre les variables, la fonction inconnue, cette fonction transformée (1).

Par analogie avec les équations différentielles, on peut étudier des *théorèmes généraux d'existence* de solutions holomorphes pour certains systèmes d'équations fonctionnelles (2), et *prolonger* ces solutions (3) dans les régions dont les points viennent tomber, après un nombre fini de transformations, dans le domaine primitif. Ce problème de prolongement se ramène à l'étude des divisions du plan en parties se transformant les unes dans les autres, problème sur lequel il faudra revenir.

§ I. — Fonctions trigonométriques ou circulaires.

220. Sous cette dénomination nous groupons les fonctions

---

(1) On précise cet énoncé en ajoutant d'autres conditions, par exemple en imposant aux solutions d'être uniformes.

(2) La convergence de séries de puissances satisfaisant à des équations fonctionnelles peut s'établir comme pour les équations différentielles, soit *par comparaison* à l'aide de fonctions majorantes, soit par la *méthode des approximations successives* (*cf.* Leau, *A. T.*, 1897, E.).

(3) Soient n fonctions $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ holomorphes dans le voisinage d'un point x_0, et toutes prolongeables le long d'un chemin C partant de x_0; désignons par $F[f_1(x), \ldots, f_n(x)]$ une fonction des n arguments f_1, ..., f_n, holomorphe au point $f_1(x_0)$, ..., $f_n(x_0)$ et prolongeable le long de C. Si la relation

$$F[f_1(x), \ldots, f_n(x)] = 0$$

est satisfaite au point x_0, elle est satisfaite tout le long de C.

méromorphes (¹) simplement périodiques, qui satisfont à une condition complémentaire que nous allons indiquer.

Considérons d'abord une fonction méromorphe quelconque, de période 2ω. Par la substitution $\left(x, \frac{\omega x}{\pi}\right)$, ramenons cette période à la valeur 2π; posons $x = x' + ix''$, et divisons le plan en *bandes* par des parallèles à l'axe imaginaire, d'abscisses $\ldots, -\pi, \pi, \ldots, (2\mu+1)\pi, \ldots$. La fonction est définie dans toute *portion finie* du plan dès qu'elle est définie dans toute portion finie de l'une de ces bandes; mais sa définition dans une bande entière n'entraîne pas sa définition dans le plan tout entier.

En effet, toute valeur prise par la fonction en des points à distance finie se retrouve à l'infini (il suffit d'ajouter à l'argument un nombre infini de fois la période); par suite, quand x devient infini sans rester dans des bandes données en nombre limité, la fonction est *indéterminée :* l'infini est une singularité essentielle.

Une fonction méromorphe simplement périodique est appelée *fonction circulaire* dans le cas particulier où cette fonction *ou bien* son inverse a des limites déterminées quand x s'éloigne à l'infini, du côté des x'' positifs ou négatifs *sans quitter une bande déterminée* (il faut que dans cette bande il y ait une limite pour $x'' = +\infty$ et une limite pour $x'' = -\infty$; mais ces deux limites peuvent être différentes) (²).

(¹) C'est Weierstrass qui a précisé le sens que Liouville donnait à ces mots, *fonctions bien déterminées,* lorsqu'il s'agit des fonctions doublement périodiques. « Il résulte, des hypothèses que Liouville fait dans la démonstration de ses théorèmes, et des résultats qu'il obtient, qu'il a toujours en vue des fonctions univoques d'une variable, *n'ayant aucun point essentiel fini.* » (*B. D.,* 1882, p. 112.)

(²) A ces valeurs limites M. Méray donne le nom de *valeurs polaires,* boréales ou australes, et aux fonctions elles-mêmes (par suite à celles que nous appelons *fonctions circulaires*) le nom de *fonctions unipériodiques polarisées.* Telles sont les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$ qui ont respectivement pour limites 0 et ∞, ∞ et ∞, ∞ et ∞, i et $-i$, $-i$ et i.

Les fonctions méromorphes périodiques non polarisées sont dites fonctions *pseudo-circulaires :* telle est la fonction $e^{\sin x}$ et la fonction $Z(x)$ d'Hermite.

Une fonction pseudo-circulaire peut avoir une infinité de pôles dans chaque bande (pourvu qu'ils n'aient pas de point limite à distance finie, sinon la fonction aurait un point essentiel à distance finie). Une fonction circulaire n'en peut avoir qu'un nombre fini : sinon, il y aurait *dans cette bande* un voisinage du point infini où la fonction différerait aussi peu que l'on veut de tout nombre donné, ce qui, par hypothèse, est impossible.

On démontre qu'une fonction circulaire $f(x)$ prend dans une bande telle

Voici les propriétés les plus simples de ces fonctions [1].

221. Théorème I. — *Toute fonction circulaire $f(x)$ de période 2π s'exprime rationnellement en fonction de e^{ix}.*

Faisons la transformation $\xi = e^{ix}$. Elle permet la représentation conforme du plan ξ (abstraction faite des points o et ∞) sur toute région fondamentale du plan x (Ire Partie, p. 173), et elle transforme $f(x)$ en une fonction $\varphi(\xi)$ qui jouit des propriétés suivantes :

1° C'est une fonction *uniforme* de ξ, à cause de la correspondance biunivoque que nous venons de rappeler [à une valeur de ξ correspondent des valeurs de x qui diffèrent d'un multiple entier de 2π; et dès lors une seule valeur de $\varphi(\xi)$, en vertu de la périodicité de $f(x)$].

2° Pour la même raison, $\varphi(\xi)$ n'a que des singularités polaires, sauf peut-être à l'origine et à l'infini.

3° Quand ξ s'approche de l'origine, x s'éloigne à l'infini du côté des x'' positifs. Mais comme on peut se borner à l'étude de

---

valeur que l'on veut, et qu'on peut obtenir pour $\lim_{x=\infty} f(x)$ telle valeur que l'on veut, à l'exception peut-être des valeurs polaires, si l'on fait x augmenter indéfiniment en se déplaçant sur une parallèle à la ligne de périodicité (cette ligne de périodicité est l'axe réel, quand la période est 2π). Ainsi (ce qui n'était pas évident) une fonction circulaire est définie dans le plan tout entier, dès qu'elle est définie dans une bande. *On peut se borner à l'étudier dans une bande.*

Quant aux fonctions doublement périodiques, il n'y aura pas lieu de les répartir en deux classes, car il suffit de les étudier dans un parallélogramme, région *finie*.

Cf. Méray, *Leçons nouvelles, etc.*, t. II, Chap. VII, et *surtout* Chessin, *American Journal*, 1897, p. 217, 233, etc.

[1] Les transcendantes que nous allons retrouver comme éléments de réduction de ces fonctions peuvent à leur tour être définies par des propriétés fonctionnelles, comme nous l'avons dit (Ire Partie, p. 170). Pour la définition fonctionnelle de e^x, *cf.* Demartres, *Analyse*, t. II, p. 12, et pour celle de $\sin x$ qui a comme fondement les relations

$$f(2x)\,f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f(x)\,f\left(x+\frac{1}{2}\right), \qquad f(-x) = -f(x),$$

cf. Moore, *Annals of Math.* (Univ. of Virginia), t. IX, p. 43; 1895.

la fonction $f(x)$ dans une bande, on peut supposer que le point x reste dans une bande déterminée, quand ξ s'approche de l'origine. Dès lors, en vertu des hypothèses complémentaires, $\varphi(\xi)$ a une limite déterminée (finie ou infinie) quand ξ tend vers zéro : l'origine est donc un point ordinaire ou un pôle pour la fonction $\varphi(\xi)$.

Quand ξ s'éloigne à l'infini, x va à l'infini du côté des x'' négatifs : le raisonnement précédent montre que le point infini est encore un point ordinaire ou un pôle pour la fonction $\varphi(\xi)$.

En résumé, $\varphi(\xi)$ est une fonction analytique uniforme n'ayant à distance finie ou infinie que des singularités polaires; c'est donc une fraction rationnelle (n° **291**) ([1]).

Théorème II. — *Toute fonction circulaire $f(x)$ a un théorème d'addition algébrique.*

En effet, mettons cette fonction (soit 2π sa période) sous la forme du quotient de deux polynomes $\psi(e^{ix})$, $\chi(e^{ix})$, et donnons à son argument deux valeurs x_1 et x_2. L'élimination de e^{ix_1}, e^{ix_2} entre les relations (Ire Partie, p. 170)

$$\begin{aligned} f(x_1)\chi(e^{ix_1}) &= \psi(e^{ix_1}),\\ f(x_2)\chi(e^{ix_2}) &= \psi(e^{ix_2}),\\ f(x_1+x_2)\chi(e^{ix_1}e^{ix_2}) &= \psi(e^{ix_1}e^{ix_2}) \end{aligned}$$

conduit à une relation algébrique

$$F[f(x_1), f(x_2), f(x_1+x_2)] = 0,$$

dont les coefficients sont indépendants de x_1 et x_2. Nous verrons bientôt à quelles conditions la réciproque est vraie.

([1]) Ce théorème justifie la définition des fonctions trigonométriques donnée plus haut (Ire Partie, p. 234).

On peut classer les fonctions circulaires d'après leur *ordre*, c'est-à-dire d'après le nombre des racines qu'elles ont dans chaque bande (de même, l'ordre d'une fonction elliptique est le nombre de ses zéros ou de ses pôles dans le parallélogramme des périodes). Une fonction circulaire d'ordre quelconque s'exprime rationnellement à l'aide d'une fonction circulaire du premier ordre (*cf.* Chessin, *A. J.*, 1897, p. 236 et 243).

THÉORÈME III. — *Entre deux fonctions circulaires de même période il existe une relation algébrique à coefficients constants.*

On s'en assure en exprimant chacune de ces fonctions (soit 2π leur période) rationnellement à l'aide de e^{ix}, et en éliminant e^{ix} entre les deux relations ainsi obtenues.

222. Une fonction circulaire a pour dérivée une fonction circulaire de même période : il y a donc une relation algébrique à coefficients indépendants de x entre une fonction circulaire et sa dérivée première. Ainsi *toute fonction circulaire satisfait à une équation différentielle algébrique du premier ordre à coefficients indépendants de x.*

Remarque. — Toute fonction périodique uniforme *non méromorphe* a une infinité de singularités essentielles; car si un point à distance finie est essentiellement singulier, il en est de même de tous les points congruents [1].

§ II. — FONCTIONS ELLIPTIQUES.

223. Liouville et Weierstrass ont abordé la théorie des fonctions elliptiques (Ire Partie, p. 229) en généralisant les propriétés fonctionnelles des fonctions trigonométriques. Le premier a mis à la base la notion de la *double périodicité* [2]; le second commence son exposé en cherchant à quelles conditions une fonction analytique uniforme admet un *théorème d'addition algé-*

---

[1] Bien que nous n'ayons pas à nous occuper de pareilles fonctions, disons que la fonction périodique uniforme la plus générale $f(x)$ de période 2ω s'obtient en effectuant dans la fonction uniforme la plus générale la substitution $\left(x, e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right)$.

En effet, la substitution $\left(x, \frac{\omega}{i\pi}\log x\right)$ transforme $f(x)$ en une fonction $\varphi(x)$ qui est uniforme, à cause de la périodicité de $f(x)$; donc on pourrait obtenir $f(x)$ en faisant dans une fonction uniforme la substitution inverse.

Par ailleurs, il est évident qu'en faisant cette substitution inverse dans une fonction uniforme quelconque, la fonction transformée acquiert la période 2ω.

[2] *C. R.*, 1851, 1er semestre, p. 452, et *J. de Crelle*, t. 88, p. 277. On y a inséré les Leçons faites par Liouville à Borchardt et à Joachimstall pendant leur séjour à Paris en 1847.

brique [1]. De là ces définitions : *une fonction elliptique est une fonction méromorphe doublement périodique* (Liouville); *c'est la fonction méromorphe la plus générale ayant un théorème d'addition algébrique* (Weierstrass).

Nous étudierons plus tard ces transcendantes en partant de la double périodicité; montrons ici comment elle découle du théorème d'addition.

224. Théorème I. — *Quand une fonction analytique uniforme $f(x)$ a un théorème d'addition algébrique, elle est rationnelle ou périodique.*

En effet, soit

$$F[f(x_1), f(x_2), f(x_1+x_2)] = 0$$

la relation algébrique donnée. Lorsqu'une fonction analytique uniforme $\varphi(x)$ n'est pas une fraction rationnelle, il existe au moins un nombre a tel que l'équation $\varphi(x) = a$ ait une infinité de racines (n° **241**, remarque). Par suite, si $f(x)$ n'est pas une fraction rationnelle, on peut choisir a de façon que l'équation $f(x_2) = a$ ait une infinité de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$; dès lors l'équation

$$F[f(x_1), a, z] = 0$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de z [pour toutes les valeurs $f(x_1+\alpha_1), \ldots, f(x_1+\alpha_n), \ldots$]. Cette équation $F = 0$ étant algébrique, ces racines ne peuvent être toutes différentes; $f(x_1+\alpha_i)$ est par exemple égal à $f(x_1+\alpha_k)$, ce qui montre que la fonction $f(x)$ admet la période $\alpha_i - \alpha_k$.

225. Théorème II. — *Une fonction analytique uniforme $f(x)$, qui a un théorème d'addition algébrique et admet une période 2ω, ou bien est fonction rationnelle de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$, ou bien admet une seconde période.*

En effet, supposons que la période 2ω soit primitive (Ire Partie,

---

[1] *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, d'après Weierstrass, rédigées par Schwarz et traduites par Padé.

p. 168). Nous dirons que deux racines de l'équation $f(x)=a$ sont *distinctes,* lorsque leur différence n'est pas un multiple entier de 2ω.

Deux cas sont possibles, suivant que l'équation $f(x)=a$ a un nombre limité de racines distinctes quel que soit a, ou bien suivant qu'elle a, pour une valeur au moins de a, une infinité de racines distinctes.

Considérons le premier cas. La substitution $\xi=e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$ transforme $f(x)$ en une fonction $\varphi(\xi)$ uniforme bien déterminée (p. 81). Or l'équation $\varphi(\xi)=a$ n'a plus, quel que soit a, qu'un nombre limité de racines; c'est donc une fraction rationnelle en ξ, d'après le théorème rappelé (p. 84) : $f(x)$ est une fonction rationnelle de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$.

Dans le second cas, partons du théorème d'addition auquel satisfait la fonction f : en reprenant le raisonnement du numéro précédent, on voit qu'elle doit admettre la période $\alpha_k-\alpha_i$. Cette période représentant la différence de deux racines distinctes (c'est-à-dire non congrues à 2ω), elle n'est pas multiple entier de 2ω; ce n'est pas non plus un sous-multiple de 2ω, puisque la période 2ω est primitive. C'est donc une période nouvelle.

Corollaire. — Une fonction analytique uniforme, à théorème d'addition algébrique, admet dans le cas général au moins deux périodes. Nous verrons qu'une fonction uniforme ne peut avoir trois périodes. Par suite, *toute fonction analytique uniforme, à théorème d'addition algébrique, est dans le cas général doublement périodique.*



LIVRE II.

Nous avons vu qu'il est possible d'aborder par divers côtés l'étude des fonctions analytiques.

On peut partir de la considération de fonctions de deux variables réelles indépendantes, que l'on associe, sans en chercher l'expression arithmétique explicite, dans le cas où ces fonctions et leurs dérivées jouissent de certaines propriétés. De là résultent des fonctions de variable complexe, dont Riemann poursuit l'étude en faisant jouer à la Géométrie un rôle important.

La même définition par des propriétés fonctionnelles, appliquée directement à une fonction de variable complexe considérée encore *a priori,* conduit à une représentation analytique de cette fonction au moyen d'une intégrale : Cauchy a trouvé le moyen d'en déduire, avec une admirable élégance, les plus importantes propositions de la Théorie des fonctions analytiques.

Enfin, on peut laisser de côté la définition d'une fonction par ses propriétés, y substituer une forme analytique de représentation de la fonction, et ainsi tout faire reposer sur une base arithmétique. C'est ainsi que Weierstrass définit la fonction analytique par la chaîne de séries dont nous avons parlé, et a recours aux séries de puissances pour en poursuivre l'étude.

Ces trois conceptions sont en germe dans les découvertes de Cauchy (¹) : néanmoins, tandis que Cauchy s'attache spécialement à la seconde méthode, c'est de Riemann et de Weierstrass que les

(¹) C'est à lui en particulier que revient l'honneur d'avoir appris à étudier, sur les équations elles-mêmes, les fonctions définies par ces équations : il a montré comment les suivre dans leur domaine d'existence, sans recourir à une expression explicite valable dans tout ce domaine. Cette idée rayonne aujourd'hui dans toute l'Analyse.

autres reçoivent leur développement. Aussi, pour les distinguer entre elles, on les caractérise souvent par les trois noms de Riemann, de Cauchy, de Weierstrass (1).

Jusqu'ici, nous nous préoccupions moins, dans le groupement des théorèmes, du procédé suivi pour les établir que du résultat obtenu. Dans ce qui va suivre nous chercherons davantage à rapprocher ceux dont la démonstration repose sur les mêmes principes, en nous plaçant successivement au point de vue de Cauchy, au point de vue de Weierstrass, au point de vue de Riemann. Si nous sommes contraints, en conséquence, de séparer parfois des propositions relatives à une même catégorie de fonctions, cet inconvénient est peut-être compensé par les avantages qu'il y a à mieux mettre en lumière l'unité de méthode.

---

(1) Comme nous l'avons dit (Ire Partie, p. 252 et 299), il faudrait faire précéder les noms de ces trois créateurs de la Théorie des fonctions analytiques de celui de Gauss : les principes essentiels qui servent de fondement à leur étude lui étaient connus. Mais Gauss n'a rien publié sur cette question, n'a presque rien communiqué, et ses manuscrits n'ont été retrouvés que longtemps après sa mort.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES FONCTIONS AU POINT DE VUE DE CAUCHY.

226. Cauchy considère, avons-nous dit, les fonctions qui sont en général uniformes, continues, monogènes, et ont une dérivée continue ([1]). Un théorème fondamental conduit à une formule qui en donne l'expression analytique, dans un domaine à connexion simple ou multiple ne se recouvrant pas, au moyen d'une intégrale.

On en déduit aisément la représentation des fonctions holomorphes par des séries de Taylor, les formules de Laurent, de Fourier, de Lagrange, de Weierstrass, de Mittag-Leffler. Plus tard les développements des fonctions elliptiques en séries et leur décomposition en éléments simples en seront des corollaires immédiats.

A cet ensemble d'applications relatif à la *représentation* des fonctions analytiques, il faut joindre des *méthodes* qui permettent d'établir leurs propriétés, de prouver l'existence des solutions des équations différentielles, d'intégrer ces équations, d'évaluer les intégrales définies, etc.

([1]) Ces conditions de Cauchy ont été simplifiées, puisqu'il suffit, pour établir la Théorie des fonctions analytiques, de s'appuyer sur la monogénéité de la fonction, sans faire intervenir la continuité de sa dérivée (Ire Partie, p. 275).

On a même pu remplacer, sur certains ensembles de points, la condition de *monogénéité* par celle de *continuité*. Par exemple, si une fonction définie dans un domaine $\mathfrak{D}$ est continue dans $\mathfrak{D}$, et si elle est monogène dans $\mathfrak{D}$ sauf peut-être sur un ensemble *réductible de points*, de *lignes rectifiables*, ou même de certaines lignes non rectifiables, elle est aussi monogène sur cet ensemble, et par suite holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}$ tout entier (*cf.* POMPÉIU, *C. R.*, 1903, 1er semestre, p. 1195).

Si la fonction était donnée sous la forme $u(x,y) + i\,v(x,y)$, il suffirait, pour qu'elle soit analytique dans $\mathfrak{D}$, que dans ce domaine les fonctions u et v fussent uniformes, continues, aient des dérivées partielles du premier ordre satisfaisant aux conditions de Cauchy-Riemann, et qu'UNE SEULE *de ces quatre dérivées partielles fût continue* (CURTISS, *B. of the American M. S.*, mai 1902, p. 329).

C'est ainsi que sur un fondement unique, la considération d'intégrales prises le long d'un contour, Cauchy fait reposer une étude générale des fonctions [1] : par sa simplicité et sa fécondité, cette théorie est devenue l'une des plus belles de l'Analyse mathématique. Continuons son exposé.

§ I. — Séries de Taylor; fonctions entières. Prolongement analytique.

Les fonctions analytiques, définies par les conditions de Cauchy, sont développables dans certains domaines en séries de puissances

---

(1) Nous n'avons à parler ici que des travaux de Cauchy relatifs à la Théorie des fonctions, les plus importants du reste, car ses découvertes sur les intégrales imaginaires « ont ouvert la voie à la théorie générale des fonctions, l'œuvre analytique importante de notre temps. A cette œuvre, Cauchy a donné la première impulsion; ceux qui la poursuivent aujourd'hui sont ses continuateurs; les découvertes mémorables de Riemann et de M. Weierstrass dans cette voie... ont été préparées par les travaux du grand géomètre français. » [Hermite, Discours prononcé à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne (*B. D.*, 1890, p. 30).]
Mais on sait assez quelle influence il a exercée dans tous les domaines.

« Ses œuvres occupent une place immense dans la Science. Toutes les parties des Mathématiques, la Géométrie, l'Algèbre, la Théorie des nombres, le Calcul intégral, la Mécanique, l'Astronomie, la Physique mathématique lui doivent les plus grandes découvertes. Plus de 700 Mémoires..., puis des Ouvrages d'une importance capitale sont le témoignage de sa prodigieuse activité scientifique et de la fécondité de son génie....

» En Géométrie élémentaire, je mentionnerai comme présentant un caractère unique la démonstration de cette proposition qu'un polyèdre convexe quelconque ne peut être changé en un autre polyèdre convexe, qui serait compris sous les mêmes plans polygonaux et disposés dans le même ordre les uns à l'égard des autres.

» En Arithmétique, Cauchy donne la démonstration, vainement cherchée jusqu'à lui, du théorème énoncé par Fermat, que tout entier est décomposable en trois nombres triangulaires, en quatre carrés, en cinq nombres pentagones, etc. Ses autres travaux sur les sommes alternées et la représentation des nombres premiers ou de leurs puissances par les formes quadratiques de déterminant négatif que Gauss a nommées principales, sont du plus haut intérêt.

» Ses recherches algébriques concernent surtout la Théorie des substitutions....

» En Mécanique, il faut mentionner le Mémoire sur la théorie des ondes, ... l'équilibre et le mouvement d'une lame solide, les vibrations longitudinales d'une verge cylindrique ou prismatique, ... les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther dans un corps cristallisé, ... la réflexion et la réfraction de la lumière, la polarisation, etc.

» La Mécanique céleste a été aussi l'objet de Mémoires nombreux et célèbres....» (Hermite, *loc. cit.*)

(Ire Partie, p. 289); par suite, dans ces domaines, les diverses branches de ces fonctions jouissent des propriétés démontrées directement pour les séries entières. Nous allons tirer de nouvelles conséquences de cette représentation des fonctions holomorphes par des séries.

227. Théorème I. — *Les racines d'une fonction analytique sont d'un degré de multiplicité fini et entier; une racine d'ordre n pour la fonction est racine d'ordre n — 1 pour sa dérivée.*

En effet, soit $f(x)$ une branche d'une fonction analytique dans un domaine $\mathfrak{D}$. Si $f(x)$ est holomorphe en un point x_0 de $\mathfrak{D}$, et s'annule en ce point ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, on a, dans le voisinage de x_0 (Ire Partie, p. 289),

$$(1)\qquad f(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x_0)+\ldots\qquad (n \gtrless 1);$$

par suite la racine x_0 a pour ordre l'*entier n* (Ire Partie, p. 58).

Cet ordre est *fini*. En effet, si la fonction et toutes ses dérivées s'annulaient en x_0, $f(x)$ serait nulle dans tout le cercle de convergence de la série (1). Ce résultat acquis, on s'en servirait pour établir que la fonction est nulle dans un second cercle; de proche en proche, on montrerait qu'elle est nulle dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.

Enfin, la fonction $f'(x)$ s'annulant en x_0 avec ses $n-2$ premières dérivées, x_0 est racine d'ordre $n-1$ de $f'(x)$.

228. Théorème II. — *Une fonction $f(x)$ analytique dans un domaine $\mathfrak{D}$ ne peut être holomorphe et avoir une valeur constante le long d'un élément fini γ d'une courbe continue intérieure à $\mathfrak{D}$, sans être constante dans toute la région où elle reste holomorphe* (Ire Partie, p. 214).

En effet, soient x_0 et x_1 deux points arbitraires de la ligne γ. A l'intérieur d'un cercle C de centre x_0, on a

$$(2)\qquad f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\ldots.$$

La différence des valeurs que prend $f(x)$ aux points x_0 et x_1 demeurant nulle quand x_1 tend vers x_0 en suivant la courbe γ, il

en est de même du rapport $f(x_1) - f(x_0) : x_1 - x_0$, et de sa limite $f'(x_0)$. La dérivée première de $f(x)$ est donc nulle en x_0.

Elle est aussi nulle en tous les points de la ligne γ, puisque le point x_0 est un point arbitraire de γ. Donc la dérivée seconde de $f(x)$ est nulle en x_0 ; et ainsi de suite.

Toutes les dérivées de $f(x)$ étant nulles en x_0, cette fonction demeure constante, en vertu de la formule (2), à l'intérieur du cercle C, et par extension dans $\mathfrak{D}$ [1].

Corollaire. — On sait que deux polynomes de degré n, égaux pour plus de n valeurs, sont identiques. Le théorème apprend que *deux fonctions, holomorphes dans un domaine d'un seul tenant et ayant même valeur sur un élément de courbe intérieur à ce domaine, sont identiques dans tout ce domaine*, puisque sur cet élément leur différence est nulle.

229. Théorème III. (Cauchy-Liouville.) — *Une fonction entière* G(x), *dont le module ne croît pas indéfiniment avec celui de la variable, est une constante* [2].

En effet, soit M une limite supérieure de $|G(x)|$. Dans un cercle de rayon *quelconque* r décrit de l'origine, on a

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots ;$$

l'hypothèse $|G(x)| < M$ sur la circonférence de rayon r entraîne (Ire Partie, p. 297)

$$|a^n| < M r^{-n}.$$

Cette inégalité est vraie si grand que soit r; par suite $M r^{-n}$ tend vers zéro quel que soit n. Les coefficients $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont donc nuls.

---

(1) Cette démonstration est de Neumann (*Vorlesungen über Riemann's Theorie*, p. 96).

(2) Une fonction *entière* est une fonction analytique sans singularité à distance finie (Ire Partie, p. 58), ou ce qui revient au même (Ire Partie, p. 292 et 306), dont le développement taylorien a un rayon de convergence infini.

Ainsi une fonction analytique uniforme ne peut être régulière en tout point à distance finie ou infinie ([1]).

230. Hermite a généralisé le théorème de Cauchy-Liouville.

S'il existe un nombre n tel que $|x^{-n} G(x)|$ soit toujours inférieur à un nombre fixe M, si grand que soit $|x|$, *la fonction entière se réduit à un polynome* de degré n ([2]).

En effet, de l'hypothèse $|x^{-n} G(x)| < M$, on déduit cette fois

$$|a_{n+p}| < M r^{-p},$$

r désignant un nombre aussi grand que l'on veut et p un entier

---

([1]) Ce théorème, sous sa forme générale, est dû à Cauchy qui l'énonce ainsi :

Si une fonction d'une variable réelle ou imaginaire z reste toujours continue, par conséquent toujours finie pour des valeurs finies de z et si d'ailleurs cette fonction ne cesse pas d'être finie, même pour des valeurs infinies de z, elle se réduira simplement à une constante. (*C. R.*, 1844; *Œuvres*, 1re série, t. VIII, p. 378.)

Dans ses *Leçons* (1847), Liouville prouve seulement qu'une fonction *doublement périodique* qui ne devient jamais infinie est impossible. (*C. R.*, 1851, 1er semestre, p. 452; *J. de Crelle*, t. 88, p. 277.)

Pour d'autres démonstrations de ce théorème, *cf.* n° 312 et NEUMANN : *Vorlesungen uber Riemann's Theorie*, p. 149.

Il peut arriver que le module de la fonction entière ne croisse indéfiniment qu'à l'intérieur d'un angle donné d'avance aussi petit que l'on veut, comme l'a montré sur un exemple M. Mittag-Leffler (*C. R.*. 1903, 1er semestre, p. 539).

Signalons encore ce théorème :

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe en tout point à distance finie d'un secteur limité par deux rayons Oa, Ob. Si son module ne croît pas indéfiniment quand x s'éloigne à l'infini entre deux rayons quelconques Oa_1, Ob_1 situés dans l'angle aOb, $f'(x)$ et par suite toutes les dérivées de $f(x)$ tendent vers zéro.

Il peut évidemment arriver que $|f(x)|$ ne croisse pas indéfiniment dans une direction Oa_1, sans que pour cela $f'(x)$ tende vers zéro dans cette direction; mais alors $|f(x)|$ croît indéfiniment dans des directions infiniment voisines. C'est ce qui arrive pour la fonction $\sin x$ (PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, B., p. 18).

Enfin, faisons la remarque suivante, dont M. Borel tire fréquemment parti : Si une fonction entière devient très grande quand $|x|$ augmente, c'est surtout parce que, pour chaque valeur de $|x|$, un terme devient très grand, et non parce que beaucoup de termes deviennent très grands (*A. M.*, t. XX, p. 393; *Leçons sur les séries à termes positifs*).

([2]) On suppose que l'inégalité servant d'hypothèse n'est vérifiée pour aucune valeur de l'exposant inférieure à n. (*Cf.* HERMITE, *J. M.*, 1885, p. 9.)

Une méthode analogue a conduit M. Hadamard à un résultat plus général (*C. R.*, 1892, 1er semestre, p. 1053).

positif arbitraire. Dès lors a_{n+1}, a_{n+2}, ... sont nuls; $G(x)$ est un polynome de degré n.

231. La distinction entre les fonctions *entières rationnelles* (ou polynomes) et les fonctions *entières transcendantes* peut se faire d'après la nature de leur point à l'infini.

En effet, la substitution (x, x^{-1}) remplace une fonction entière par une fonction dont le développement suivant les puissances négatives de la nouvelle variable a un nombre *limité* ou *illimité* de termes. Par suite, l'origine est, suivant les cas, un pôle ou un point singulier essentiel pour cette fonction transformée.

Le point infini est donc un *pôle* dans le cas du polynome : c'est une *discontinuité essentielle* pour les fonctions entières transcendantes.

Nous en conclurons qu'à l'extérieur de tout cercle, si grand qu'en soit le rayon, non seulement une fonction entière *transcendante* dépasse tout nombre donné (p. 92), mais qu'*elle s'approche autant que l'on veut de tout nombre donné* (n° **241**).

232. Soient a et b deux constantes finies quelconques.

Théorème IV. (Picard.) — *Une fonction entière qui ne peut prendre ni la valeur a, ni la valeur b pour une valeur finie de la variable x, se réduit à une constante. Une fonction entière qui ne peut prendre ni la valeur a, ni la valeur b pour une infinité de valeurs de x se réduit à un polynome* ([1]).

La démonstration ordinaire de ce théorème repose sur des propriétés des fonctions modulaires ([2]); aussi ne sera-t-elle donnée que plus tard.

([1]) Ainsi, des deux équations $G(x) = a$, $G(x) = b$, l'une au moins a une racine, si $G(x)$ n'est pas une constante, et l'une au moins a une infinité de racines, si $G(x)$ n'est pas un polynome. On peut appeler *équations exceptionnelles* les équations $G(x) =$ const. qui n'ont pas de zéro ou n'en ont qu'un nombre limité, et dire qu'à toute fonction entière correspond au plus une équation exceptionnelle.

([2]) Picard, *A. E. N.*, 1880, p. 146 et 154. — M. Hadamard a démontré le théorème sans faire d'emprunt à la théorie des fonctions modulaires, dans le cas particulier où les coefficients du développement de la fonction entière satisfont à certaines inégalités (*J. M.*, 1893, p. 188). M. Borel en a prouvé la première partie dans le cas général, également sans l'intervention des fonctions modulaires (*C. R.*, 1896, 1er semestre, p. 1045; *Leçons sur les fonctions entières*, p. 103).

Remarque. — Le module d'une fonction entière peut dépasser tout nombre donné; donc, elle peut prendre toute valeur, sauf peut-être une seule valeur finie. On a ainsi un énoncé qui comprend le théorème de Cauchy-Liouville et celui de M. Picard ([1]).

233. Théorème V. — *Une série dont les éléments sont holomorphes dans un domaine borné simplement connexe* $\mathcal{D}$ *et sont continus sur la frontière* C *de* $\mathcal{D}$, *définit une fonction holomorphe dans tout domaine* $\mathcal{D}'$ *intérieur à* $\mathcal{D}$ *et sans point commun avec* C, *pourvu que cette série converge dans* $\mathcal{D}$ *et* converge uniformément *sur* C.

En effet, soit

$$(3) \qquad s(z) = u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$$

la série donnée. Son intégrale le long de C s'obtient en faisant la somme terme par terme des intégrales de ses éléments (Ire Partie, p. 125); il en est de même si l'on n'effectue l'intégration de ces éléments qu'après avoir divisé chacun d'eux par $z - x$, x représentant l'affixe d'un point intérieur à $\mathcal{D}$. On a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_n(z)}{z-x}\,dz.$$

([1]) En se bornant aux fonctions de *genre fini* (n° 283), M. Hadamard a étendu le théorème de M. Picard; il a montré qu'en désignant par $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynomes différents, il est impossible que les deux équations $G(x) = P(x)$, $G(x) = Q(x)$ aient chacune un *nombre limité de racines* sans que $G(x)$ soit aussi un polynome (Hadamard, *J. M.*, 1893. — Borel, *Fonctions entières*, p. 89).

En prenant l'expression d'*équation exceptionnelle* dans un sens un peu plus large et en faisant intervenir la notion d'*ordre d'une fonction entière* (n° 283), M. Borel a montré qu'une fonction entière a encore au plus une équation exceptionnelle quand son ordre est entier, et qu'elle n'en a pas quand son ordre n'est pas entier (*Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 56). M. Hadamard a trouvé pour les fonctions entières de genre *infini*, et même dans le voisinage d'un point essentiel pour les fonctions analytiques, une règle d'exclusion analogue : elle permet de reconnaître si le cas d'exception que comporte le théorème de M. Picard peut se présenter pour la fonction considérée (*C. R.*, 1902, 2e semestre, p. 1309).

Enfin, M. Picard avait facilement déduit de son théorème cette proposition qui le renferme comme cas particulier : *il ne saurait y avoir plus de deux valeurs finies a et b que ne puisse prendre une fonction méromorphe, pour une valeur finie de la variable.* Le théorème de d'Alembert en est aussi une conséquence (Picard, *A. E. N.*, 1880).

Le premier membre représente une fonction continue, uniforme, monogène, par suite, une fonction holomorphe ([1]); le second membre a pour valeur (Ire Partie, p. 281) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ (puisque les fonctions u_n sont holomorphes) c'est-à-dire $s(x)$. La série $s(x)$ est donc bien une fonction holomorphe ([2]).

Corollaire. — Soient a et x deux points, l'un arbitraire intérieur à $\mathfrak{D}$, l'autre intérieur à une circonférence Γ de centre a ne sortant pas de $\mathfrak{D}$. On a (Ire Partie, p. 290)

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} s^n(a), \qquad s^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Remplaçons dans cette dernière intégrale la série $s(z)$ par son

---

([1]) On peut aussi prouver que cette intégrale est holomorphe en développant $\frac{1}{z-x}$ suivant les puissances croissantes de $x-a$, a désignant un point intérieur à $\mathfrak{D}$ (*cf.* Ire Partie, p. 289), et en intégrant terme par terme la série obtenue, après en avoir multiplié les éléments par $s(z)$.

([2]) On voit directement que, dans les conditions de l'énoncé, *la série $s(z)$ converge uniformément dans $\mathfrak{D}'$ ainsi que les séries formées par les dérivées successives des termes de $s(z)$.*

En effet, formons la série de terme général $\frac{u_n(z)}{(z-x)^{p+1}}$; soient M la valeur maximum de $|z-x|^{-p-1}$ quand z se déplace sur C et x dans $\mathfrak{D}$, et $r_n(z)$ le reste de la série $s(z)$. A tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre N tel que, pour $n > N$, $|M\,r_n(z)|$ soit inférieur à ε, quand le point z parcourt C. Par suite la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{u_n(z)}{(z-x)^{p+1}} dz = \frac{2i\pi}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p(x)$$

a un reste R_n dont le module n'atteint pas εL (L désignant la longueur de C) pour les valeurs $n > N$; donc la série $\sum u_n^p(x)$ converge uniformément dans $\mathfrak{D}'$.

On en conclut aussi (Ire Partie, p. 127) que cette série représente la dérivée d'ordre p de $s(z)$.

Ce théorème subsiste quand les termes $u_n(z)$ cessent d'être continus sur C en des points ne formant pas de suite linéaire (à condition que ces termes restent bornés), et quand la convergence uniforme de $s(z)$ sur C n'a plus lieu en des points ne formant pas de suite linéaire [pourvu que $|s_n(z)|$ soit borné].

Cf. PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, B., p. 11. — DALWIGK, *M. A.*, t. LV, p. 516.

expression (3) ce qui donne

$$\int_{\Gamma} \frac{s(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \int_{\Gamma} \frac{\sum u_p(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

En vertu du théorème, la série à termes continus $\sum u_p$ converge uniformément sur la circonférence Γ; on peut donc intervertir les symboles de sommation et d'intégration et écrire

$$s^n(a) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_p(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \sum_{p=0}^{\infty} u_p^n(a).$$

Ainsi, dans les conditions de l'énoncé, *les séries formées par les sommes des dérivées successives des termes de la série* $s(x)$ *convergent uniformément dans* $\mathfrak{D}'$ *et représentent les dérivées successives de* $s(x)$, ce qui prouve l'existence de ces dérivées (déjà établie, Ire Partie, p. 282) et fournit un procédé pour les obtenir (*voir* Ire Partie, p. 223).

234. L'important théorème de Weierstrass démontré plus haut à l'aide de théorèmes sur les séries (Ire Partie, p. 219) résulte immédiatement des calculs précédents.

En effet, ramenons à l'origine le point a et combinons les égalités ci-dessus ainsi transformées; il vient, dans le nouveau domaine de frontière Γ,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} u_p^n(0) \right].$$

On a du reste, dans ce domaine,

$$u_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} u_p^n(0).$$

Donc, le coefficient de x^n dans le développement de $s(x)$ en série entière est la somme des coefficients des termes en x^n dans les développements des éléments $u_p(x)$ en séries entières.

235. Nous terminerons ce Paragraphe en exposant deux méthodes de prolongement analytique, qui se rattachent à la fois aux procédés de Cauchy et aux méthodes géométriques de Riemann.

Commençons par celle de M. Lindelöf, qui repose essentiellement sur l'emploi de la *représentation conforme* (¹).

Soient $\mathfrak{D}$ un domaine simplement connexe d'un plan x, et $\mathfrak{C}$ un cercle arbitraire situé dans un autre plan τ, par exemple un cercle ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Une proposition fondamentale due à Riemann (n° 326) apprend à former une fonction analytique uniforme dans $\mathfrak{D}$, $g(x)$, telle que la transformation $\tau = g(x)$ établisse une correspondance *biunivoque* et conforme entre les domaines $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}$.

En faisant l'inversion d'une pareille relation $\tau = g(x)$ on obtient une fonction $x = \gamma(\tau)$, elle aussi holomorphe dans le cercle $\mathfrak{C}$, d'après les propriétés des représentations biunivoques et conformes (nos 194 et 323).

Cela posé, soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$: son développement en série suivant les puissances de $x - x_0$, x_0 désignant un point arbitraire intérieur à $\mathfrak{D}$, ne converge que dans un *cercle;* par suite la fonction n'est représentée par le développement de Taylor que dans une partie du domaine où elle existe.

Mais faisons la substitution $x = \gamma(\tau)$. Elle transforme la fonction $f(x)$ en une fonction $\varphi(\tau)$ holomorphe dans $\mathfrak{C}$ (²), par suite développable dans ce cercle en une série de la forme

$$\varphi(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \ldots + \alpha_n \tau^n + \ldots.$$

On en conclut

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 g(x) + \ldots + \alpha_n [g(x)]^n + \ldots,$$

développement valable dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.

(¹) LINDELÖF, *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIV, n° 7 (avril 1898).

(²) Il résulte immédiatement des définitions de Cauchy que si $f(x)$ est fonction holomorphe de x dans $\mathfrak{D}$, et si x est fonction holomorphe de τ dans $\mathfrak{C}$, $f(x)$ est une fonction holomorphe de τ dans $\mathfrak{C}$ (*voir* Ire Partie, p. 52).

Pour établir cette proposition par les méthodes de Weierstrass, on part des développements

$$x - x_0 = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \ldots,$$

$$f(x) = b_0 + b_1 (x - x_0) + \ldots$$

et du théorème (Ire Partie, p. 224) qui permet, au point de vue des substitutions, de traiter les séries entières comme des polynomes.

C'est bien une méthode de prolongement analytique des fonctions, que nous venons d'exposer, méthode qui permet le calcul effectif de leurs valeurs numériques en dehors du cercle de convergence de leur élément initial.

En effet, soit $\mathfrak{P}(x - x_0)$ l'élément qui définit la fonction analytique $f(x)$, fonction que l'on sait être holomorphe dans un domaine $\mathfrak{D}$, plus étendu que le cercle de convergence C de l'élément $\mathfrak{P}$; $f(x)$ est, par exemple, une intégrale d'une équation différentielle linéaire, dès lors une fonction dont on connaît *a priori* les singularités possibles. Pour avoir la valeur de cette fonction en un point quelconque x_1 de $\mathfrak{D}$, il suffira de considérer un domaine simplement connexe, ayant à son intérieur les points x_0 et x_1, que l'on sache représenter d'une façon conforme sur le cercle $\mathfrak{C}$, de telle sorte que, par exemple, les points x_0 et o des deux plans se correspondent. Soit

$$x - x_0 = a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots + a_n\tau^n + \ldots$$

la substitution qui réalise cette représentation.

Ordonnons l'élément

$$\mathfrak{P}(x - x_0) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

c'est-à-dire la série

$$b_0 + b_1(a_1\tau + \ldots + a_n\tau^n + \ldots) + \ldots + b_n(a_1\tau + \ldots)^n + \ldots$$

suivant les puissances de τ.

La série obtenue (Ire Partie, p. 224),

$$(\alpha) \qquad \alpha_0 + \alpha_1\tau + \ldots + \alpha_n\tau^n + \ldots$$

(remarquons que ses coefficients sont des polynomes par rapport aux coefficients a et b et peuvent être calculés effectivement par identification) converge dans le voisinage de l'origine, et représente, dans ce voisinage, la fonction $\varphi(\tau)$ transformée de $f(x)$. Cette fonction $\varphi(\tau)$ est holomorphe dans tout le cercle $\mathfrak{C}$, d'après le raisonnement précédent; donc, en vertu du théorème de Cauchy (Ire Partie, p. 291), la série (α), qui converge à l'origine, converge dans tout ce cercle. C'est dire que, dans la région de $\mathfrak{D}$ extérieure

à C ([1]), la série $\mathfrak{P}$ est prolongée par la série

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 g(x) + \ldots + \alpha_n [g(x)]^n + \ldots,$$

dont les éléments sont connus.

Ajoutons que ces transformations de M. Lindelöf peuvent servir non seulement à étendre analytiquement des fonctions en dehors du cercle de convergence de leur élément initial, mais encore à rechercher leurs points singuliers et surtout à remplacer des développements par des développements plus convergents. On peut même profiter de ces substitutions pour calculer les coefficients des relations linéaires qui existent entre les intégrales des systèmes fondamentaux relatifs aux divers points singuliers d'une équation linéaire donnée, ou les coefficients des substitutions linéaires que subissent les intégrales d'un système fondamental quand on tourne autour d'un point singulier ([2]).

([1]) Parmi les transformations souvent usitées pour passer d'un domaine $\mathfrak{D}$ au cercle $\mathfrak{C}$, M. Lindelöf rappelle ou indique les transformations

$$\tau = \frac{x}{\alpha - x}, \qquad \tau = \frac{e^{\frac{\pi x}{2a}} - 1}{e^{\frac{\pi x}{2a}} + 1}, \qquad \tau = \frac{1 - \sqrt[n]{1-x}}{1 + \sqrt[n]{1-x}}.$$

La première (Ire Partie, p. 74) fait correspondre, au cercle $|\tau| < k$, le domaine

$$\left|\frac{x}{\alpha - x}\right| < k,$$

et par suite la région extérieure à la circonférence

$$\left|\frac{x}{\alpha - x}\right| = k$$

dans l'hypothèse $k > 1$. Elle permet donc de prolonger une fonction dans des domaines s'étendant à l'infini.

La deuxième (*cf.* Poincaré, *C. R.*, 1882, 1er semestre, p. 578; *J. M.*, 1886, p. 168) fait correspondre d'une manière biunivoque et conforme la bande $\mathfrak{D}$ indéfinie du plan x comprise entre les droites $\eta = \pm a$ (on a posé $x = \xi + i\eta$) au cercle $|\tau| \overline{\gtrless} 1$.

La troisième fait correspondre au cercle $|\tau| \overline{\gtrless} 1$ le secteur qui est limité par deux demi-droites issues du point $x = 1$ et faisant avec l'axe réel négatif les angles $n\frac{\pi}{2}$ et $-n\frac{\pi}{2}$, et qui comprend l'origine à son intérieur (lorsque n surpasse 2, ce secteur recouvre le plan x plusieurs fois). En particulier, quand n est un entier pair, ce secteur est une surface de Riemann à $\frac{n}{2}$ feuillets, ayant le point $x = 1$ comme point de ramification, et limitée par les segments $(1, -\infty)$ de l'axe réel.

([2]) Lindelöf, *loc. cit.*, p. 30. *Cf.* aussi Mittag-Leffler, *A. M.*, t. XV. — Hamburger, *J. de Crelle*, t. 83.

236. C'est aussi en s'appuyant avec Riemann sur des considérations géométriques et en s'aidant de la formule de Cauchy (Ire Partie, p. 280 et 317) que M. Schwarz a obtenu le *prolongement par symétrie* [1].

Soit $f(x)$ une fonction, holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ dont la frontière renferme un segment C de l'axe réel $O\xi$: on suppose que cette fonction tend vers une *valeur bien déterminée* (au sens donné Ire Partie, p. 279) et réelle $f(\xi)$, quand le point x s'approche par un chemin quelconque intérieur à $\mathcal{D}$ de tout point ξ de C, et par suite qu'elle est continue sur C.

Représentons par $\bar{x}$ le point symétrique de x par rapport à $O\xi$, et associons à chaque point $\bar{x}$ la valeur imaginaire conjuguée $\overline{f(x)}$ de $f(x)$. L'ensemble des points $\bar{x}$ définit un domaine $\bar{\mathcal{D}}$ symétrique de $\mathcal{D}$ (on l'appelle *domaine image*), et l'ensemble des nombres $\overline{f(x)}$ définit une fonction $f_1(\bar{x})$ holomorphe dans $\bar{\mathcal{D}}$.

Les deux fonctions holomorphes $f(x)$ et $f_1(\bar{x})$, définies de part et d'autre de C, ont même valeur sur ce segment de l'axe réel; dès lors *elles se prolongent analytiquement l'une l'autre* (Ire Partie, p. 317).

Ainsi, non seulement la fonction $f(x)$ peut être prolongée dans le domaine image de $\mathcal{D}$, mais, pour obtenir ce prolongement, il suffit de considérer les valeurs conjuguées des valeurs que prend $f(x)$ dans $\mathcal{D}$, et de les associer aux points $\bar{x}$ conjugués des points x de $\mathcal{D}$.

Pour généraliser cette loi, il n'y a qu'à remplacer le segment C de l'axe réel par un segment arbitraire de droite (Ire Partie, p. 328). Par suite, toute fonction, holomorphe dans un domaine dont la frontière contient un segment rectiligne et prenant des valeurs déterminées réelles sur ce segment (au sens ci-dessus), est continuable dans le domaine image du domaine primitif; son prolongement s'obtient en associant, aux points $\bar{x}$ symétriques des points x du premier domaine par rapport au segment, les valeurs conjuguées des valeurs de la fonction dans le premier domaine.

---

(1) *Cf.* SCHWARZ, *J. de Crelle*, t. 70, p. 107 (*Œuvres*, t. II, p. 67). — PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, B., p. 27. — DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 174. — PICARD, *Analyse*, t. II, p. 269 (*voir* aussi *infra*, n° 316).

237. Ces résultats s'étendent à tout domaine dont la frontière renferme un *arc régulier* C de ligne analytique ([1]). On le démontre en établissant une correspondance biunivoque entre un domaine de petites dimensions situé dans le plan x de part et d'autre de C (nous distinguerons les régions situées des deux côtés de C en les appelant c et $\bar{c}$), et un domaine du plan transformé τ situé de part et d'autre d'un segment de son axe réel (nous désignerons par Γ le segment réel transformé de C dans le plan τ, par γ et $\bar{\gamma}$ les régions situées de part et d'autre de Γ) ([2]).

Soient

$$\xi = \xi(t), \qquad \eta = \eta(t)$$

les équations de C. Chaque point $x_0(\xi_0, \eta_0)$ de cette courbe correspond à une valeur t_0 du paramètre. Pour des valeurs réelles de $|t - t_0|$ assez petites, on peut écrire

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots \\ \eta(t) &= \eta_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \ldots \end{aligned} \qquad (a_1^2 + b_1^2 \gtrless 0),$$

et dès lors ces séries convergent si l'on y remplace t par un nombre complexe $\tau (\tau = t + it')$ tel que, dans le voisinage de chaque point t_0, $|\tau - t_0|$ ne dépasse pas une certaine valeur. Posons

$$x = \xi + i\eta = \xi(\tau) + i\eta(\tau) = \gamma(\tau).$$

Dans le voisinage de chaque valeur t_0 correspondant à des points de C, x est une fonction holomorphe de τ; réciproquement, τ est

---

([1]) Une courbe $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ est *analytique* lorsque ses coordonnées sont fonctions analytiques (variables réelles) d'un paramètre t, dans le voisinage de chaque point t_0 de la courbe (sauf peut-être en des points formant une suite ponctuelle).

Un arc de courbe analytique est *régulier en un point* $t_0(\xi_0 \eta_0)$, lorsque, dans le voisinage de ce point, l'une des différences $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$ est une fonction régulière de l'autre, c'est-à-dire peut être représentée par une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de l'autre différence : sinon, le point est *singulier*. Par suite (p. 7 et Ire Partie, p. 224), l'arc est régulier en t_0, si l'on a pu choisir le paramètre de façon que $\xi'(t_0)$ et $\eta'(t_0)$ ne soient pas nuls à la fois. Un arc est *régulier*, lorsqu'il est régulier en tous ses points.

La notion d'arc régulier joue un rôle important dans le problème du prolongement des fonctions analytiques (et des fonctions harmoniques, n° 316).

([2]) *Cf.* Schwarz, *Monatsberichte der Akad. zu Berlin*, 1870, p. 774 (*Œuvres*, t. II, p. 150).

une fonction holomorphe de x dans un certain domaine, puisque $a_1^2+b_1^2$ n'est pas nul sur C (p. 7). Par suite, à un domaine x de dimensions assez petites renfermant la courbe C à son intérieur, la relation $x=\gamma(\tau)$ fait correspondre d'une manière biunivoque et conforme un domaine bien défini τ (*fig.* 2); ce domaine τ est

Fig. 2.



situé de part et d'autre d'un segment de l'axe réel, puisque l'on obtient dans le plan x l'arc C en supposant τ réel.

La position du point τ qui, par la transformation précédente, correspond à un point x dépend seulement de la courbe C, et non pas de la forme des fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$ employées pour la définir. En effet, les diverses représentations de l'arc C s'obtiennent en remplaçant dans $\xi(t)$ et $\eta(t)$ le paramètre t par une fonction analytique réelle d'un autre paramètre t_1. Donnons à t_1 des valeurs complexes τ_1 : d'après les résultats du numéro précédent, aux valeurs conjuguées de τ_1 correspondent des valeurs conjuguées de τ, et par suite les mêmes points x.

Ainsi, pour définir d'une façon précise deux points x *images* l'un de l'autre par rapport à l'arc régulier C, il suffit de les choisir de façon que les deux points τ obtenus par la transformation $x=\gamma(\tau)$ soient *symétriques* par rapport à l'axe réel.

Revenons à la question du prolongement. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ limité en partie par un arc régulier C de courbe analytique, et tendant vers une limite *déterminée* (Ire Partie, p. 279) et réelle $f_1(t)$, quand x s'approche par un chemin quelconque, situé du côté c, des divers points de C (la continuité de f_1 sur C en est une conséquence).

La substitution $x=\gamma(\tau)$ transforme $f(x)$ en une fonction $\varphi(\tau)$ holomorphe (p. 98) dans un domaine tel que sa frontière renferme un segment Γ de l'axe réel du plan τ; $\varphi(\tau)$ tend vers une

valeur déterminée et réelle quand τ s'approche de ce segment, du côté γ. On sait donc prolonger la fonction $\varphi(\tau)$ au delà de l'axe réel, et par suite prolonger $f(x)$ du côté $\bar{c}$ de C. Ce prolongement s'étendra à tout le domaine x formé par les points images du premier domaine, relativement à l'arc de courbe considéré.

238. En utilisant la transformation précédente, $x = \gamma(\tau)$, M. Painlevé a mis sous une forme simple les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit prolongeable *au delà d'un arc régulier de courbe analytique* (Ire Partie, p. 317) [1].

Soient toujours $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ les équations de cette courbe C.

1° *Pour que la fonction $f(x)$ définie du côté c de* C *soit prolongeable du côté $\bar{c}$, il faut et il suffit que $f(x)$ prenne sur une portion de* C *une suite de valeurs $f_1(t)$, qui soit fonction analytique de t.*

En effet, si $f(x)$ est continuable du côté $\bar{c}$, il existe par définition une fonction $F(x)$, holomorphe dans le voisinage des points d'un arc de C et coïncidant avec $f(x)$ du côté c de C. Par la transformation $x = \gamma(\tau)$, les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ deviennent des fonctions $\varphi(\tau)$ et $\Phi(\tau)$ telles que $\Phi(\tau)$ prolonge $\varphi(\tau)$ du côté $\bar{\gamma}$ d'un segment Γ de l'axe réel (Γ est le transformé de la portion de C considérée). Réciproquement, si une fonction $\Phi(\tau)$ prolonge $\varphi(\tau)$, la fonction $f(x)$ est prolongeable du côté $\bar{c}$ de C.

Or, pour que $\varphi(\tau)$ soit prolongeable du côté $\bar{\gamma}$ de Γ, il faut et il suffit que $\varphi(\tau)$ prenne sur Γ une suite de valeurs $\varphi_1(t)$ qui coïncident, dans le voisinage de chaque point t_0 de Γ, avec celles que prend aux points $\tau = t$ une fonction $\Phi(\tau)$, holomorphe en chaque point t_0 de Γ ; par suite qu'en chaque point t_0 considéré, $f_1(t)$ soit développable en série de Taylor pour des valeurs suffisamment petites de $|t - t_0|$, ou enfin que $f_1(t)$ soit fonction analytique de t sur une portion de la courbe C.

[1] *Cf.* SCHWARZ, *loc. cit.* — PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, B., p. 64.

2° Avec M. Schwarz, on peut donner au théorème une forme plus simple :

Pour que la fonction $f(x)$ soit prolongeable du côté $\bar{c}$, il faut et il suffit que sa partie réelle $u(\xi, \eta)$ (ou sa partie imaginaire v) *prenne sur une portion de C une suite de valeurs $u_1(t)$, qui soit fonction analytique de t.*

Par la transformation $x = \gamma(\tau)$, on est ramené à chercher à quelles conditions la transformée $\varphi(\tau)$ de $f(x)$ est prolongeable du côté $\bar{\gamma}$ de l'axe réel. Posons

$$\varphi(\tau) = \varphi(t + it') = u_1(t, t') + i\, v_1(t, t'),$$

et étudions d'abord le cas où $u(\xi, \eta)$ s'annule le long d'une portion de C et par suite où $u_1(t, t')$ s'annule le long de Γ.

Introduisons la fonction

$$\varphi_1(\tau) = -u_1(t, -t') + i\, v_1(t, -t');$$

elle est définie du côté $\bar{\gamma}$ de Γ et elle est analytique (p. 101, ou Ire Partie, p. 48); je dis qu'elle prolonge la fonction $\varphi(\tau)$.

En effet, posons

$$\varphi_1(\tau) = U_1(t, t') + i\, V_1(t, t') \qquad (\tau = t + it').$$

Les fonctions $v_1(t, t')$, $V_1(t, -t')$ ont même valeur pour un même système de valeurs de t et de t'; par suite ces fonctions coïncident aux points τ symétriques par rapport à Γ. Les fonctions u_1 et U_1 s'annulent sur Γ; on peut donc prendre t' assez petit pour que $|u_1|$ et $|U_1|$ soient inférieurs à tout nombre donné, quand le point t décrit le segment Γ.

Par suite, les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\varphi_1(\tau)$ ont même valeur le long de Γ, et dès lors elles se prolongent l'une l'autre.

Pour ramener au cas que nous venons d'étudier celui où la partie réelle $u(\xi, \eta)$ prend sur C une suite de valeurs $u_1(t)$, fonction analytique de t, on applique à la fonction $u_1(\tau)$ la transformation inverse de la transformation $x = \gamma(\tau)$. La fonction $u_1(\tau)$, analytique dans un domaine suffisamment petit avoisinant Γ, se transforme en une fonction $U(x)$ analytique dans un domaine

situé de part et d'autre de C. La fonction $f(x) - U(x)$ a sa partie réelle nulle sur C, et par suite est prolongeable du côté $\bar{c}$ de C.

Il en sera de même de la somme des deux fonctions prolongeables $U(x)$, $f(x) - U(x)$, c'est-à-dire de $f(x)$ (¹).

§ II. — Séries de Laurent et de Mittag-Leffler. Applications.

239. Considérons une fraction rationnelle $f(x)$, dont les infinis $a_1, \ldots, a_n$ soient rangés par ordre de modules croissants ou stationnaires (a_n fini). Elle est développable en série entière en x dans le domaine $|x| < |a_1|$, en série entière en x^{-1} dans le domaine $|x| > |a_n|$, en série procédant suivant les puissances *négatives et positives* de x dans chacun des $n - 1$ domaines $|a_i| < |x| < |a_{i+1}|$ en supposant $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

C'est une représentation de ce dernier type que le commandant P.-A. Laurent a étendue à toute fonction analytique uniforme dans la couronne comprise entre deux circonférences concentriques arbitraires C et C', holomorphe en tous les points de cette couronne et *bien déterminée* (Iʳᵉ Partie, p. 279) sur C et C' (nous supposerons ramené à l'origine le centre de C et de C') (²). La formule cherchée va se déduire encore (Iʳᵉ Partie, p. 289) de développements de la fonction auxiliaire $(z - x)^{-1}$, qui ont la forme demandée et convergent uniformément sur C et sur C'.

(¹) Lorsqu'un contour est formé de plusieurs arcs réguliers de courbes analytiques, et que les valeurs d'une fonction sur chacun d'eux forment une fonction analytique du paramètre servant à représenter ces arcs de courbe, la fonction est prolongeable au delà du contour, *sauf en général autour des sommets*, c'est-à-dire des points communs à deux arcs consécutifs.

(²) *C. R.*, 1843, 2ᵉ semestre, p. 348. — *Cf.* aussi le Rapport de Cauchy, *C. R.*, 1843, 2ᵉ semestre, p. 938.

Dès 1841, Weierstrass, sans rien publier, avait obtenu ce théorème (*Œuvres*, t. I, p. 51).

A la démonstration de Laurent, si élégante, mais qui fait usage des intégrales de Cauchy et dès lors suppose le Calcul intégral, on a substitué des preuves qui reposent sur les seuls principes élémentaires relatifs aux séries, en harmonie avec les procédés de Weierstrass dans sa Théorie des fonctions. (*Cf.* Mittag-Leffler, *A. M.*, t. IV, p. 5 et 81. — Scheeffer, *A. M.*, t. IV, p. 375.)

Soit x un point intérieur à la couronne considérée (*fig.* 3). La formule fondamentale de Cauchy donne (Ire Partie, p. 280)

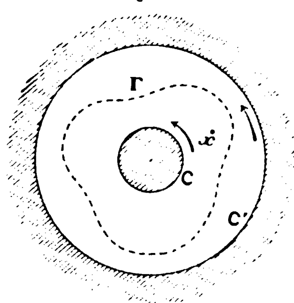
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Pour évaluer la première intégrale, partons de l'identité

$$\frac{f(z)}{z-x} = f(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \ldots\right) \qquad (|x| < |z|).$$

Quel que soit le point x *à l'intérieur* du cercle C′, cette série

Fig. 3.



converge uniformément sur la circonférence C′ : on peut donc l'intégrer terme par terme, ce qui donne

$$(1)\quad \int_{C'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{C'} \frac{f(z)}{z}\,dz + x\int_{C'} \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \ldots + x^n\int_{C'} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \ldots.$$

Pour obtenir la seconde intégrale, développons cette fois $\frac{1}{z-x}$ suivant les puissances *décroissantes* de x. La série

$$\frac{f(z)}{x-z} = f(z)\left(\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{x^n} + \ldots\right) \qquad (|x| > |z|)$$

converge uniformément sur la circonférence C, dans le domaine (x) *extérieur* à cette circonférence; on a donc

$$(2)\quad \int_{C} \frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{1}{x}\int_{C} f(z)\,dz + \ldots + \frac{1}{x^n}\int_{C} z^{n-1} f(z)\,dz + \ldots.$$

La série (1) converge absolument à l'intérieur du cercle C′ et uniformément dans tout domaine fermé intérieur à C′; même conclusion pour la série (2), à l'extérieur du cercle C. Leur

somme est donc convergente dans la région commune à ces deux domaines; par suite, dans cette couronne circulaire, on a

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n \qquad \left[a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right],$$

Γ désignant une ligne fermée arbitraire (rectifiable et *simple*, Ire Partie, p. 270) intérieure à la couronne et entourant l'origine ([1]). *C'est le théorème de Laurent.*

La série obtenue converge en tout point intérieur à la couronne de frontière C, C′, et elle converge uniformément dans toute couronne intérieure à cette couronne ([2]).

240. Ce théorème (1843) renferme le germe de la théorie des points singuliers essentiels, développée plus tard par Weierstrass (1876).

Autour d'une singularité *isolée* (nous la supposerons ramenée à l'origine) d'une fonction analytique uniforme $f(x)$, on peut tracer deux circonférences C et C′ telles que $f(x)$ soit holomorphe dans la couronne qu'elles déterminent, *si petit que soit le rayon de* C. Donc, à l'intérieur d'un cercle déterminé C′, à l'exclusion seulement de son centre, on peut écrire

$$f(x) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathfrak{P}_1(x).$$

La série entière $\mathfrak{P}_1$ a un rayon de convergence. Quant à la

---

([1]) En effet, le théorème de Cauchy (Ire Partie, p. 279) permet d'évaluer les intégrales qui entrent dans des formules (1) et (2) en remplaçant les cercles C et C′ par le contour Γ.

([2]) Il suffit de limiter respectivement aux termes de rang p et q les développements de $(z-x)^{-1}$ suivant les puissances croissantes et décroissantes de x pour obtenir, *sous forme d'intégrale*

$$\int_{C'} \frac{x^p}{z^p(z-x)}\,dz + \int_C \frac{z^{q+1}}{x^{q+1}(x-z)}\,dz,$$

l'expression du *reste* de la série de Laurent quand on s'arrête aux termes de rang p et q.

De plus, on voit *directement* que ce reste tend vers zéro, ce qui prouve la convergence du développement, indépendamment du théorème relatif à l'intégration terme par terme des séries uniformément convergentes.

Ces deux remarques s'appliquent aux développements de Taylor (Ire Partie, p. 289), de Weierstrass (n° 214), de Lagrange (n° 219), etc.

série $\mathfrak{P}$, puisqu'elle converge à l'extérieur d'un cercle de rayon aussi petit que l'on veut, c'est relativement à x^{-1} une fonction entière rationnelle ou transcendante : représentons-la par $G\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ainsi, dans le voisinage de *toute singularité isolée,* une fonction analytique uniforme est représentable par la somme d'une fonction holomorphe et d'un *polynome* en x^{-1}, ou bien par la somme d'une fonction holomorphe et d'une *fonction transcendante entière* en x^{-1}. Dans le premier cas, la singularité est par définition un *pôle;* dans le second cas, c'est un *point essentiel.*

Remarquons, de plus, que les coefficients du développement ne changent pas, d'après les valeurs des intégrales qui les déterminent, quand les rayons r et r' des circonférences C et C' varient, pourvu que l'on ne franchisse aucun point singulier de la fonction $f(x)$. En particulier, ils restent les mêmes quand r tend vers zéro, puisque C entoure une discontinuité isolée.

On voit que les séries $\mathfrak{P}_1$ et G *ont des coefficients bien définis* (s'il y a un terme indépendant, on le met dans la série $\mathfrak{P}_1$) : dans ces conditions, le développement en série de Laurent est unique. Par suite, à chaque discontinuité *isolée* a d'une fonction analytique uniforme, correspond une fonction entière en $(x-a)^{-1}$: on l'appelle *partie principale* ou *fonction caractéristique* relative à la singularité. C'est une fraction rationnelle ou une série suivant que la singularité est polaire ou essentielle (1).

---

(1) Elle est bien caractéristique de la *singularité,* puisque des deux parties dont se compose le développement de la fonction au voisinage de ce point, celle-ci est seule *singulière;* l'autre est *régulière.*

Si a est un pôle, l'ordre ou *degré d'infinitude* de ce pôle est égal au degré du dénominateur de la fonction caractéristique (Ire Partie, p. 61). On voit que ce degré d'infinitude, comme le degré de multiplicité des zéros d'une fonction holomorphe (p. 91), est un *entier.*

La transformation habituelle (x, x^{-1}) donne une représentation analogue pour une fonction analytique uniforme dans le voisinage du point infini lorsque ce point est une singularité isolée (ou un point ordinaire). Elle montre que, pour les valeurs de x dont le module dépasse celui de la singularité à distance finie de module le plus grand, on a

$$f(x) = G(x) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction $G(x)$ s'évanouit, se réduit à un polynome, est une transcendante entière suivant que le point infini est un point ordinaire, un pôle, un point essentiel.

241. Théorème. — *Une fonction analytique uniforme croît sans limite dans le voisinage d'un pôle; dans le voisinage d'un point essentiel isolé, elle s'approche autant que l'on veut de tout nombre donné* α (1).

En effet, ramenons à l'origine la singularité à étudier.

La première partie du théorème résulte de ce que, si l'origine est un pôle, la fonction considérée $f(x)$ est égale à la somme d'une fonction régulière à l'origine, $\mathfrak{P}_1(x)$, qui reste finie, et d'une *fraction rationnelle* $G\left(\frac{1}{x}\right)$ dont le module dépasse tout nombre donné.

La seconde partie a été démontrée par Weierstrass (2) : voici comment M. Picard la déduit du théorème de Cauchy-Liouville.

Introduisons la fonction auxiliaire $\frac{1}{f(x)-\alpha}$. Cette fonction n'est pas régulière à l'origine; sinon son inverse serait holomorphe à l'origine ou bien aurait l'origine comme pôle (Ire Partie, p. 59). Elle n'a pas l'origine pour pôle; sinon son inverse serait holomorphe à l'origine. L'origine est donc un point essentiel pour la fonction auxiliaire comme pour la fonction proposée; d'après le même raisonnement, c'est même un point essentiel isolé d'autres points essentiels, sinon l'origine ne serait pas relativement à la fonction $f(x)$ un point essentiel isolé d'autres points essentiels (3).

Cela posé :

1° Si, dans le voisinage de ce point essentiel, la fonction auxi-

---

(1) Il suffit que le point essentiel soit isolé d'autres singularités *essentielles* (Ire Partie, p. 60).

(2) Weierstrass, 1876, *Œuvres*, t. II, p. 123 (trad. *A. E. N.*, 1879, p. 149). — Picard, *Analyse*, t. II, p. 120 (*voir* aussi : Hölder, *M. A.*, t. XX, p. 138).

Le théorème est vrai pour *une infinité de points* situés dans le voisinage du point essentiel (ramenons-le à l'origine). En effet, d'un point x satisfaisant aux conditions $|x| < \varepsilon$, $|f(x) - \alpha| < \eta$, on déduit un second point x_1 pour lequel on aura

$$|x_1| < |x| \quad \text{et} \quad |f(x_1) - \alpha| < |f(x) - \alpha|.$$

Et ainsi de suite pour une infinité de points x_2, x_3, ... tendant vers l'origine.

(3) Plus généralement, une transformation homographique quelconque effectuée sur $f(x)$ conserve le caractère du point essentiel.

liaire a une infinité de pôles, son inverse s'annule en chacun d'eux : l'égalité $f(x) = \alpha$ est rigoureusement satisfaite en une infinité de points voisins du point essentiel.

2° Si ce point essentiel est isolé de toute autre singularité même polaire, la fonction auxiliaire est développable par la formule de Laurent aussi près que l'on veut de l'origine ; on a ainsi

$$\frac{1}{f(x)-\alpha} = G\left(\frac{1}{x}\right) + \mathfrak{P}_1(x) = \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + a_0 + a_1 x + \ldots.$$

D'après le théorème de Cauchy-Liouville, la fonction $|G|$ dépasse tout nombre, si grand soit-il, à l'intérieur d'un cercle quelconque ayant l'origine pour centre ; à l'intérieur d'un cercle de rayon assez petit, la fonction $\mathfrak{P}_1$ diffère aussi peu que l'on veut de a_0.

Donc, dans le voisinage de l'origine, la fonction $G + \mathfrak{P}_1$ dépasse tout nombre donné : par suite, son inverse tend vers zéro, et $f(x)$ se rapproche autant que l'on veut de α (1).

Remarque. — Dans le voisinage d'un point essentiel isolé, la fonction $f(x)$ peut-elle non seulement s'approcher autant que l'on veut de tout nombre donné α, mais aussi devenir rigoureusement égale à α ?

M. Picard a complété la proposition de Weierstrass en montrant que, dans le voisinage de tout point essentiel isolé, *l'équa-*

---

(1) De ce théorème M. Picard conclut que deux fonctions analytiques uniformes dans un domaine d'un seul tenant $\mathfrak{D}$, où *elles n'ont que des discontinuités isolées,* coïncident dans tout ce domaine, si elles ont la même valeur le long d'un élément continu de courbe intérieur au domaine (Riemann).

En effet, appelons $\varphi(x)$ la différence des deux fonctions données. On sait déjà (Ire Partie, p. 214 et IIe Partie, p. 91) que la fonction $\varphi(x)$ est nulle dans tout domaine d'un seul tenant ne renfermant aucune des discontinuités des fonctions données.

Étendons ce domaine de manière à approcher autant que l'on veut d'une discontinuité a.

Même dans le voisinage de a, la différence $\varphi(x)$ reste régulière : car si a était un pôle ou un point essentiel, cette différence serait infinie ou indéterminée dans le voisinage de a, tandis qu'elle est nulle aussi près que l'on veut de a.

La fonction $\varphi(x)$ est donc holomorphe, et par suite nulle, dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.

tion $f(x) = \alpha$ a une infinité de racines, sauf peut-être pour une ou deux valeurs exceptionnelles de α (¹).

Ainsi, dans le voisinage de l'origine, $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-1}$ prend toutes les valeurs, o excepté; $e^{\frac{1}{x}}$ prend toutes les valeurs, sauf o et ∞ (Iʳᵉ Partie, p. 172).

En particulier, si l'équation $f(x) = \alpha$ n'a qu'un nombre *fini* de racines, quel que soit α, $f(x)$ est une fraction rationnelle (²).

242. Soit une fonction uniforme, représentée par une série $s(x)$ dont les éléments $u_n(x)$ sont holomorphes dans une couronne ⓪ comprise entre deux circonférences décrites de l'origine, *qui converge uniformément* dans cette couronne. L'important théorème

---

(¹) *C. R.*, 1879, 2ᵉ semestre, p. 745 et 1106; *A. E. N.*, 1880, p. 165; *Analyse*, t. III, p. 346.

Ainsi, représentons par α, β, γ trois constantes distinctes (le nombre infini n'étant pas exclu) : l'une au moins des trois équations

$$f(x) = \alpha, \quad f(x) = \beta, \quad f(x) = \gamma,$$

a une infinité de racines dans le voisinage de la singularité isolée a de la fonction uniforme $f(x)$.

Ce théorème s'étend immédiatement aux fonctions $f(x)$ uniformes sur une surface de Riemann et n'ayant que des singularités essentielles isolées. Si les trois équations ci-dessus n'ont qu'un nombre limité de racines, la fonction $f(x)$ n'a pas de singularité essentielle; c'est par suite une fonction algébrique de x ramifiée comme la fonction algébrique définissant la surface de Riemann.

Enfin MM. Painlevé, Remoundos, Maillet ont donné comme vraisemblable la généralisation suivante du théorème de M. Picard :

Une fonction analytique à n branches prend, dans le voisinage de tout point singulier essentiel isolé, toutes les valeurs sauf 2n au plus (*cf.* Remoundos, *C. R.*, 1903, 1ᵉʳ semestre, p. 953; Maillet, *C. R.*, 1903, 1ᵉʳ semestre, p. 1128).

Dans le cas particulier des fonctions circulaires, le théorème de M. Picard se précise grâce à la proposition énoncée à la page 81. Là, en effet, nous avons dit que pour faire prendre à une fonction circulaire une valeur arbitraire, sauf peut-être les valeurs polaires, il suffit de déplacer la variable sur une parallèle à un segment convenable : chaque valeur se retrouve un nombre infini de fois quand x croît indéfiniment. Par suite, la fonction prend telle valeur que l'on veut, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles, au voisinage de son point essentiel (l'infini); *ces valeurs exceptionnelles ne sont autres que les valeurs polaires* (Chessin, *American Journal*, 1897, p. 233).

(²) Le théorème de M. Picard s'établit, comme celui du nº 232, à l'aide des

de Weierstrass (Ire Partie, p. 223) relatif à son développement suivant les puissances négatives et positives de la variable est une conséquence immédiate de la formule de Laurent.

En effet, posons

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad u_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{np} x^p,$$

et désignons par $\mathfrak{D}'$ une couronne intérieure à $\mathfrak{D}$, limitée par deux circonférences décrites de l'origine. La fonction $s(x)$ converge uniformément dans le domaine $\mathfrak{D}'$, frontière comprise; par suite, dans ce domaine, elle est uniforme et continue, et a une dérivée déterminée.

On peut donc la développer par la formule de Laurent en une série de la forme

$$s(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_q x^q \qquad \left(\alpha_q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s(z)}{z^{q+1}} dz\right),$$

Γ désignant une ligne fermée arbitraire intérieure à $\mathfrak{D}'$ et entourant l'origine une seule fois.

---

fonctions modulaires; mais on peut démontrer directement ce dernier corollaire, au moins si l'on suppose que $f(x)$ n'a que des singularités isolées.

En effet, admettons que l'équation $f(x) = \alpha$ n'ait jamais plus de p racines, quel que soit α (pour abréger, nous supposerons ces racines simples), et qu'elle en ait p pour une valeur α. Entourons ces p racines respectivement de cercles $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, extérieurs les uns aux autres, assez petits pour que le module minimum δ de $f(x) - \alpha$ sur leurs circonférences ne soit pas nul. Pour tout nombre α' tel que $|\alpha - \alpha'| < \delta$, l'équation $f(x) = \alpha'$ a encore une racine dans chaque cercle $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ (Ire Partie, p. 288), et par suite elle a, pour toutes ces valeurs de α', p racines.

Cela posé, si $f(x)$ avait une singularité essentielle isolée a (déterminons les cercles $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ de manière à pouvoir entourer a d'un cercle γ n'empiétant pas sur ces cercles), il y aurait à l'intérieur de γ au moins un point déterminé x' pour lequel $|f(x') - \alpha|$ serait inférieur à δ; par suite, l'équation

$$(x) = f(x')$$

aurait $p+1$ racines (celles qui sont dans les cercles $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, et la racine x'), ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi $f(x)$ n'a pas de singularité essentielle isolée à distance finie; on verrait de même qu'elle n'en a pas à l'infini : c'est donc une fraction rationnelle (n° 291). *Cf.* DEMARTRES, *Analyse*, t. II, p. 70.

Transformons α_q; en y remplaçant $s(z)$ par son développement, il vient

$$\alpha_q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{np} z^{p-q-1}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Gamma \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{np} z^{p-q-1}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nq},$$

puisque la convergence uniforme de $s(z)$ sur Γ permet d'échanger les symboles de sommation et d'intégration, et qu'il suffit ensuite dans chaque intégrale de s'occuper du terme pour lequel $p = q$. On a donc

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{np} x^p\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{np}\right),$$

comme nous l'avions déjà prouvé.

243. La Théorie des correspondances biunivoques permet parfois de remplacer des fonctions holomorphes dans un domaine ω à un ou plusieurs contours par des fonctions holomorphes dans une couronne circulaire ϖ : il suffit pour cela que la correspondance entre les deux domaines s'obtienne par une relation $\tau = g(x)$, $g(x)$ étant holomorphe, telle que la relation inverse $x = \gamma(\tau)$ définisse une fonction $\gamma(\tau)$ holomorphe dans ϖ. Par suite, la formule de Laurent conduit à des développements valables dans des domaines autres que les aires comprises entre deux circonférences concentriques (*voir* p. 98) [1].

---

[1] La méthode même qui conduit aux formules de Taylor et de Laurent donne bien d'autres développements.

Par exemple, une fonction analytique uniforme, holomorphe dans des aires limitées par des ovales $|\sin x| = \text{const.}$, peut être représentée dans ces aires par une série procédant suivant les puissances du sinus de la variable (TEIXEIRA, *J. de Crelle*, t. 116, p. 14).

Une fonction analytique uniforme, holomorphe dans l'aire limitée par deux circonférences non concentriques, est développable dans cette aire en une série ordonnée suivant les puissances de $x - a : x - b$, a et b désignant des constantes convenablement choisies. On en déduit le développement, au moyen de séries de cette forme, des fonctions holomorphes dans des aires limitées par des arcs de cercles (TEIXEIRA, *J. de Crelle*, t. 122, p. 97).

On peut faire de nombreuses applications des transformations dont nous parlons ici. (Pour des exemples *cf.* HERMITE, *J. de Crelle*, t. 116, p. 85.)

Exemple I : Les séries de Fourier. — Posons $x = \xi + i\eta$, et désignons par $f(x)$ une fonction analytique uniforme admettant la période $2\pi i$, holomorphe dans la bande indéfinie du plan x limitée par deux droites $\xi = \alpha$, $\xi = \beta$. La transformation $\tau = e^x$ substitue à cette bande $\mathfrak{B}$ la couronne $\mathfrak{C}$ comprise entre deux circonférences décrites de l'origine avec les rayons e^α, e^β. Les deux régions ne se correspondent pas, il est vrai, d'une manière biunivoque, car à un point τ correspondent une infinité de points x; néanmoins, à cause de la périodicité de la fonction $f(x)$, la fonction transformée $f(\log\tau)$ ou $\varphi(\tau)$ ne prend qu'une valeur en chaque point τ de $\mathfrak{C}$. Par suite cette fonction, uniforme dans la couronne $\mathfrak{C}$ et régulière en chacun de ses points, est développable par la formule de Laurent; on a, dans cette couronne,

$$\varphi(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \tau^\nu,$$

et dès lors, dans la bande $\mathfrak{B}$,

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{\nu x} \quad (^1).$$

---

(1) La substitution $\left(x, \frac{\omega x}{2\pi i}\right)$ permet le développement, suivant les puissances de $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, d'une fonction analytique ayant une période quelconque ω, holomorphe dans une bande indéfinie comprise entre deux parallèles au segment $\overline{o\omega}$.

En particulier, soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π. Associons dans le développement de $f(x)$ en série procédant suivant les puissances de e^{xi} les valeurs de ν égales et de signes contraires, et servons-nous des formules

$$e^{\nu x i} = \cos\nu x + i\sin\nu x, \qquad e^{-\nu x i} = \cos\nu x - i\sin\nu x;$$

il vient

$$(\text{F}) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x).$$

Ces séries convergent uniformément; leurs dérivées d'ordre quelconque s'obtiennent en faisant la somme des dérivées de leurs termes. Leurs coefficients a_ν et b_ν sont représentés par des intégrales curvilignes (p. 108), que l'on ramène aisément aux intégrales rectilignes déjà rencontrées (Ire Partie, p. 152).

Notons enfin que la formule de Fourier (F) n'est démontrée ici que pour le cas où $f(x)$ est *holomorphe et périodique,* ce qui lui enlève de son intérêt essentiel.

Pour des cas plus généraux, *cf.* CAUCHY, *Œuvres,* 2e série, t. VII, p. 393. — PICARD, *Analyse,* t. II, p. 167, et les références données précédemment (Ire Partie, p. 155).

Exemple II. — Reprenons la transformation (I[re] Partie, p. 79)

$$2x = \tau + \frac{c^2}{\tau}, \tag{3}$$

et ne considérons dans le plan τ que la région extérieure à la circonférence de rayon c ayant l'origine pour centre. Cette transformation fait correspondre, d'une manière biunivoque et conforme, l'aire $\mathfrak{D}$ du plan x comprise entre deux ellipses quelconques de foyers c et $-c$, et la couronne $\mathfrak{C}$ comprise entre deux circonférences convenables de rayons supérieurs à c. Par suite elle remplace une fonction $f(x)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$ par une fonction $\varphi(\tau)$ holomorphe dans $\mathfrak{C}$.

Cette fonction a donc dans $\mathfrak{C}$ un développement de la forme

$$\varphi(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \tau^\nu;$$

dès lors on a, dans $\mathfrak{D}$,

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (x + \sqrt{x^2 - c^2})^\nu.$$

Pour fixer dans cette formule la détermination du radical, on établit dans le plan x la coupure $(-c, +c)$: la fonction $\sqrt{x^2 - c^2}$ devient uniforme, et elle est déterminée dans tout le plan si l'on convient qu'elle est positive sur l'axe des ξ, à droite du point c.

244. La formule de Laurent (p. 108) donne l'expression, dans une couronne circulaire, d'une fonction analytique uniforme $f(x)$, régulière en tout point de cette couronne.

Supposons que la fonction $f(x)$ n'ait qu'une seule singularité à distance finie; la série $\mathfrak{P}_1(x)$ est alors une transcendante entière; on peut donc écrire

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x}\right) + G_1(x).$$

Cette relation est valable dans tout le plan, les points o et ∞ exceptés, et elle sert à représenter toutes les fonctions analytiques

uniformes partout régulières sauf en ces points. Par suite ([1]), les fonctions analytiques uniformes, qui n'ont que deux singularités a et b, ont dans tout le plan (sauf aux points a et b) un développement du type

$$f(x) = G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right),$$

G_a et G_b désignant des *fonctions quasi entières* ([2]).

C'est cette formule que Weierstrass a étendue aux fonctions analytiques uniformes n'ayant dans un domaine $\mathcal{D}$ d'un seul tenant qu'un nombre *fini* n de discontinuités, polaires ou essentielles ([3]). Son théorème n'est qu'un corollaire de celui de Lau-

---

([1]) En effet, faisons la substitution $(x, x-a : x-b)$, et développons chaque terme des séries G et G_1 suivant les puissances de $\frac{1}{x-a}$ et $\frac{1}{x-b}$. Le groupement des termes correspondant aux mêmes puissances de $x-a$ et $x-b$ introduit des séries ordonnées suivant les puissances négatives de $x-a$ et $x-b$, qui convergent dans tout le plan.

([2]) L'analogie entre les propriétés des fonctions entières $G(x)$ et des fonctions que l'on en déduit par la substitution $\left(x, \frac{1}{x-a}\right)$ a conduit M. Maillet à appeler *fonctions quasi entières* les fonctions ainsi transformées.

Plus généralement, on appelle *fonction quasi entière* à n points singuliers essentiels $a, \ldots, l$ la fonction obtenue en faisant *la somme* de n fonctions quasi entières ayant chacune un seul point essentiel, c'est-à-dire en remplaçant dans des fonctions entières $G_a(x), \ldots, G_l(x)$ l'argument x respectivement par $(x-a)^{-1}, \ldots, (x-l)^{-1}$ et en faisant la somme des fonctions transformées. La formule de Weierstrass, que nous allons établir, prouve l'identité des fonctions quasi entières et des fonctions dont les singularités sont en nombre fini. On verrait facilement (*cf.* n° 296, note) qu'une fonction quasi entière à n points essentiels est *le produit* de n fonctions quasi entières n'ayant chacune qu'un point essentiel.

M. Maillet appelle *fonction quasi méromorphe* la fonction obtenue en remplaçant dans des fonctions méromorphes en nombre fini l'argument x par $(x-a)^{-1}, \ldots, (x-l)^{-1}$ et en faisant la somme des fonctions transformées. Une fonction quasi méromorphe a donc un nombre fini de points essentiels et un nombre quelconque de pôles; et réciproquement. On démontrerait, en procédant comme au n° 292, qu'elle est le quotient de deux fonctions quasi entières (MAILLET, *J. M.*, 1902, p. 364, 380, etc.).

([3]) Weierstrass parvient à sa formule sans faire intervenir d'intégrale (*Œuvres*, t. II, p. 109; trad. *A. E. N.*, 1879, p. 137). Voir *infra*, n° 295, la généralisation de cette formule; on trouvera aussi plus loin (n° 284 texte, et n° 296 note) des formules de décomposition en facteurs, qui correspondent à ces décompositions en sommes.

Les fonctions dont nous parlons sont représentables *d'une infinité de manières* à l'aide de sommes de n fonctions n'ayant chacune qu'une singularité; parmi ces développements, celui de Weierstrass est le plus simple.

rent; aussi avec Bourguet on y peut parvenir en reprenant la méthode exposée plus haut (p. 107) [1].

Désignons par $f(x)$ la fonction à représenter, par $a, b, \ldots, l$, ses singularités à l'intérieur de $\mathcal{D}$, par x l'affixe d'un point intérieur à $\mathcal{D}$ et distinct des singularités. Entourons chacune des singularités, ainsi que le point x, d'un cercle assez petit pour qu'il n'empiète pas sur les cercles voisins et ne sorte pas du domaine $\mathcal{D}$, ce qui détermine un domaine à connexion multiple, dans lequel la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ est holomorphe. Le théorème de Cauchy donne

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{a}\frac{f(z)}{z-x}\,dz - \ldots - \frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

C désignant soit la frontière de $\mathcal{D}$ si la fonction y est *bien déterminée,* soit un contour intérieur aussi voisin que l'on veut de cette frontière.

Au second membre, la première intégrale est une fonction de x déterminée, continue et ayant une dérivée déterminée : désignons cette fonction holomorphe par $\varphi(x)$. Pour évaluer l'une quelconque des autres intégrales, par exemple la première, écrivons

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n} + \ldots$$
$$(|z-a| < |x-a|).$$

Cette série converge uniformément sur la circonférence entourant le point a, quel que soit le point x considéré à l'extérieur de cette circonférence. On peut donc l'intégrer terme par terme le long de cette circonférence, après en avoir multiplié les éléments par le facteur borné $f(z)$; on a ainsi

$$\int_{a}\frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{1}{x-a}\int_{a}f(z)\,dz + \frac{1}{(x-a)^2}\int_{a}(z-a)f(z)\,dz + \ldots.$$

---

[1] *Cf.* Hermite, *J. de Crelle*, t. 91, p. 61.

En combinant la formule que nous allons trouver et celle que nous établirons plus loin (n° 293), on parvient à une expression des fonctions analytiques uniformes ayant un nombre limité de points singuliers essentiels et une infinité de pôles sans point limite à distance finie.

Voir aussi Appell, *A. M.*, t. I, p. 111.

Ce développement converge si petit que soit $|x-a|$, puisque la discontinuité a est isolée : représentons-le par $-2\pi i\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$; G_a sera une fonction quasi entière. Désignons par $-2\pi i G_b, \ldots, -2\pi i G_l$ les intégrales analogues. Dans tout le domaine $\mathcal{D}$, sauf aux points $a, b, \ldots, l$, on a ainsi

$$f(x) = \varphi(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + \ldots + G_l\left(\frac{1}{x-l}\right).$$

Cette formule correspond à celle de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples ; les fonctions $G_a, \ldots, G_l$ sont respectivement caractéristiques de chaque discontinuité.

Quand la fonction $f(x)$ n'a qu'un nombre fini de singularités, on peut étendre à l'infini le domaine $\mathcal{D}$ où la fonction $\varphi(x)$ reste holomorphe : $\varphi(x)$ est une fonction entière. Cette fonction entière se réduit à une constante quand les singularités sont en nombre fini et à distance finie ([1]).

245. Considérons maintenant une fonction ayant des pôles ou des points essentiels, des lignes singulières ouvertes ou fermées, des espaces lacunaires, et comptons pour *une* singularité l'un quelconque de ces ensembles de points (on suppose que deux quelconques d'entre eux n'ont pas d'élément commun, et qu'ils n'ont pas de points à l'infini) ([2]).

Une fonction analytique uniforme $f(x)$ n'ayant qu'un nombre fini de singularités de ce type peut être remplacée par une somme de fonctions n'ayant chacune dans le plan qu'une seule singularité.

([1]) La théorie des résidus (n° 255) permet d'obtenir d'une manière analogue l'expression de toute fonction uniforme d'un *point analytique* (Ire Partie, p. 103) n'ayant qu'un nombre *fini* de points singuliers sur une surface de Riemann. [Une fonction de la variable x est dite *fonction uniforme du point analytique* (x, y), si elle reprend la même valeur lorsque le point (x, y) décrit un cycle quelconque.]

De même les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler, relatifs à la décomposition en facteurs primaires et à l'expression des fonctions uniformes qui ont une infinité de points singuliers, s'étendent aux fonctions uniformes d'un point analytique. *Cf.* APPELL, *A. M.*, t. I, p. 113, 132, 141.

([2]) La substitution habituelle ramène le cas où la fonction n'est pas régulière à l'infini à celui que nous étudions : $f(x)$ est alors la somme de n fonctions dont l'une a pour lignes singulières plusieurs lignes ayant des points à l'infini.

En effet, reprenons la méthode de Bourguet. Soient $E_a, \ldots, E_l$ les ensembles de singularités, et $\alpha, \ldots, \lambda$ des contours fermés contenant respectivement à leur intérieur ces divers ensembles ([1]). La fonction $f(x)$ est holomorphe dans le domaine d'un seul tenant limité par les courbes $\alpha, \ldots, \lambda$ et un contour fermé arbitraire C les renfermant toutes à son intérieur. On a donc, en tout point x de ce domaine,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \ldots - \frac{1}{2\pi i}\int_\lambda \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

La première intégrale est une constante, puisque la fonction $f(x)$ est régulière à l'infini. Les autres sont des fonctions holomorphes à l'extérieur des ensembles $E_a, \ldots, E_l$, car on peut prendre les contours $\alpha, \ldots, \lambda$ aussi voisins que l'on veut des éléments de l'ensemble, sans changer les valeurs que prennent ces intégrales pour des points x extérieurs aux contours. On a donc

$$f(x) = \varphi_a(x) + \ldots + \varphi_l(x) + C,$$

$\varphi_a(x), \ldots, \varphi_l(x)$ désignant des fonctions qui sont respectivement holomorphes à l'extérieur de contours fermés déterminés ([2]).

246. *Théorème de Mittag-Leffler.* — Le développement d'une fonction analytique uniforme en série de Mac-Laurin a été obtenu en remarquant que la fonction auxiliaire $\frac{1}{1-x}$ est elle-même représentable par une série entière uniformément convergente. Plus généralement, à tout développement de cette fonction auxiliaire en série de polynomes uniformément convergente dans tout domaine fermé extérieur au segment $(1, +\infty)$, correspond, pour toute

---

([1]) Lorsqu'il se trouve, parmi les ensembles de singularités, une ligne L qui est *fermée,* il n'y a pas lieu de s'occuper de la fonction à l'intérieur de L, puisqu'une fonction analytique définie à l'extérieur de L n'existe pas à son intérieur, au moins si l'on n'a pas généralisé la notion du prolongement (Ire Partie, p. 326).

([2]) *Cf.* Painlevé, *A. T.*, 1888, B., p. 118. — Guichard, *A. E. N.*, 1883, p. 307.

Ce théorème permet d'étendre à une singularité quelconque (point non isolé, ligne singulière, espace lacunaire) la définition de *fonction caractéristique :* dans tous les cas, cette fonction jouit des mêmes propriétés que dans le cas du point isolé.

fonction analytique uniforme, un développement valable dans l'étoile de M. Mittag-Leffler. Cette importante remarque, faite par M. Borel, fournit une méthode presque intuitive pour établir le théorème fondamental de M. Mittag-Leffler relatif à la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique (Ire Partie, p. 325) (¹).

Gardons les notations déjà employées. Soient

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}$$

l'élément qui définit la fonction analytique considérée, et a_i l'une quelconque de ses singularités. Formons l'*étoile principale* (²)

(¹) *Cf.* Borel, *A. E. N.*, 1899, p. 63, et les références déjà données (Ire Partie, p. 325).

Dans ses premières Notes, M. Mittag-Leffler parvenait à ses divers théorèmes par l'usage exclusif des considérations élémentaires habituelles sur les *séries* de puissances. Dans une quatrième Note (*A. M.*, t. XXVI, p. 353), il a recours à l'*intégration* entre des limites imaginaires et obtient ainsi l'expression du terme complémentaire de ses séries sous une forme analogue à celle donnée par Cauchy pour le *reste* du développement de Taylor ou de Laurent (p. 108, note).

Parmi les expressions analytiques propres à représenter des fonctions monogènes, l'intégrale de Laplace-Abel (Laplace, *Œuvres*, t. VII; Abel, *Œuvres*, t. II, p. 67)

$$\int_0^\infty F(ax)e^{-a}\,da,$$

étudiée à ce point de vue par M. Borel (*Séries divergentes*) et M. Phragmén (*C. R.*, 1901, 1er semestre, p. 1396) est des plus intéressantes : le théorème de Cauchy conduit aussi M. Mittag-Leffler à une représentation fort simple d'une branche fonctionnelle au moyen de cette intégrale (Mittag-Leffler, *loc. cit.*, *cf.* aussi *C. R.*, 1903, 1er semestre, p. 537).

Si au lieu de chercher un *prolongement* de l'élément initial $\mathfrak{P}(x)$ d'une fonction analytique $f(x)$ *valable dans toute l'étoile*, on veut seulement un développement qui *dépasse* le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x)$, en tout point non singulier, il suffit de considérer un développement de $(1-x)^{-1}$ convergent dans un cercle dépassant le cercle de rayon *un*, c'est-à-dire un prolongement de la série $1+x+x^2+\ldots$. M. Borel obtient une expression particulièrement simple de la fonction $f(x)$, en développant par la série de Taylor $(1-x)^{-1}$ suivant les puissances de $(1+x)$. (*B. S. M.*, 1900, p. 200.)

Cf. encore Lindelöf, *B. S. M.*, 1901, p. 157. — Dell'Agnola, *Annali di M.*, 2e semestre, 1901, p. 227. — Laurent, *J. M.*, 1902, p. 306, etc.

(²) L'étoile *principale* est celle qui a été définie (Ire Partie, p. 325) sous le nom d'*étoile*. *Cf.* Mittag-Leffler, *A. M.*, t. XXIII, p. 48; t. XXIV, p. 200 et 219; t. XXVI, p. 360.

appartenant à cet élément, en traçant les coupures rectilignes L_{a_i} entre chaque point a_i et l'infini ([1]), et désignons par $f(x)$ la branche de fonction analytique uniforme correspondant à cette étoile. Appelons L_1, L_z des vecteurs analogues aux coupures L_{a_i} partant des points 1 et z; enfin posons

$$(4) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} x^{\nu},$$

$\sum p_n(x)$ désignant l'un quelconque des développements en série de polynomes de la fonction $\frac{1}{1-x}$ dont on a justifié précédemment l'existence (Ire Partie, p. 321) : cette série (4) converge donc dans tout le plan sauf sur L_1, et elle converge uniformément dans tout domaine fermé simplement connexe *intérieur* à sa région de convergence ([2]).

De l'égalité (4) on déduit

$$(5) \qquad \frac{1}{z\left(1-\dfrac{x}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} \frac{x^{\nu}}{z^{\nu}}.$$

La série (5) converge pour toutes les valeurs de $\frac{x}{z}$, sauf pour celles qui correspondent à des points $\frac{x}{z}$ situés sur le vecteur L_1 : donc elle converge, quelle que soit la position de x dans l'étoile, sur toute ligne C intérieure à l'étoile, entourant l'origine et telle qu'aucun des vecteurs du type L_z issus des divers points de cette ligne ne passe pas le point x. Elle converge uniformément, en tout point x de l'étoile, sur toute ligne fermée satisfaisant aux conditions ci-dessus. Pour obtenir un pareil contour C, on pourra

---

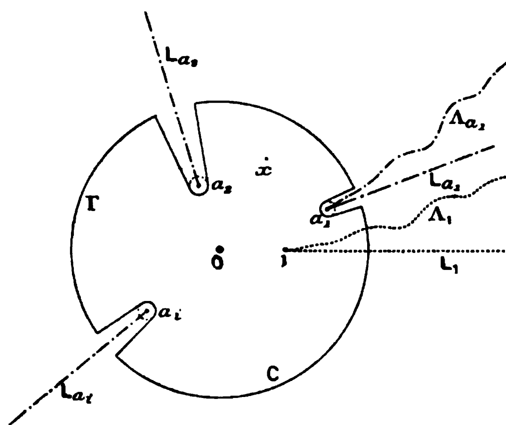
([1]) Ces coupures rectilignes sont artificielles (Ire Partie, p. 101); aussi on peut leur substituer des lignes A_{a_i}, lieux géométriques obtenus en multipliant par le nombre complexe a_i les affixes des points d'une ligne arbitraire A_1 sans point double, allant du point 1 à l'infini.

On peut donc calculer la valeur de la fonction en un point quelconque de son domaine d'existence, en modifiant la ligne L_1 qui sert à former l'étoile, et dès lors les nombres $c_{n\nu}$ correspondants.

([2]) Par suite, la frontière de ces domaines n'a aucun point commun avec L_1. (Les domaines fermés dont nous parlons sont continus, bornés, et contiennent leur frontière.)

tracer autour de l'origine et de chaque point a_i un cercle Γ et des cercles γ_i dont les rayons seront respectivement l'un aussi grand que l'on veut et les autres aussi petits que l'on veut, mener de l'origine les tangentes aux cercles γ_i, et regarder C comme formé par les portions de ces tangentes comprises entre Γ et les γ_i, les portions des γ_i comprises entre les tangentes, et enfin les portions de Γ comprises entre les tangentes menées de O à des cercles tels que γ_i et γ_{i+1} (*fig.* 4).

Fig. 4.



Cela posé, dans la formule de Cauchy,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

remplaçons $\frac{1}{z-x}$ par le développement (5). Puisque la série obtenue sous le signe d'intégration converge uniformément sur C, on peut permuter les symboles d'intégration et de sommation et écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\nu_n} \frac{c_{n\nu}}{2\pi i} x^\nu \int_C \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}\,dz;$$

par suite, en vertu de la formule (Ire Partie, p. 282)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}\,dz = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = \frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)}{\nu!},$$

on a bien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} \frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu.$$

Comme on l'avait annoncé, la série qui représente la branche considérée $f(x)$ de la fonction analytique donnée a pour termes des polynomes dont les coefficients sont le produit des nombres $\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)$, caractéristiques de cette branche, par des nombres $c_{n\nu}$ indépendants de $f(x)$ et caractéristiques de la représentation adoptée pour la fonction auxiliaire $(1-x)^{-1}$. Elle converge vers $f(x)$ dans toute l'étoile, et elle converge uniformément vers cette limite dans tout domaine fermé intérieur ([1]).

247. Le théorème que nous venons d'exposer permet, étant données une suite indéfinie de polynomes

$$(6) \qquad \pi_1(x), \quad \pi_2(x), \quad \ldots, \quad \pi_n(x), \quad \ldots \qquad \left\{ \begin{array}{l} \pi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu_n} \gamma_{\nu n} x^\nu \\ \lim_{n=\infty} \pi_n(x) = \frac{1}{1-x} \end{array} \right\},$$

([1]) L'étoile principale est un continuum *limité*, et les séries de M. Mittag-Leffler cessent en général, *sur sa frontière*, de converger ou de représenter la branche de fonction analytique considérée. Aussi on peut se poser, relativement à cette frontière, une question analogue à celle qu'a traitée Abel (*Œuvres*, t. I, p. 618) concernant les valeurs d'une fonction analytique sur la circonférence du cercle de convergence de la série entière qui la définit.

Parmi les sommets a de l'étoile principale, considérons les sommets a_k qui sont des *pôles*, et désignons par L^M l'ensemble des coupures indéfinies L_k ou des portions de coupures L_k telles que tous leurs points à partir de a_k soient des points ordinaires ou des pôles pour la branche $f(x)$. M. Helge von Koch a montré que, moyennant un choix convenable des coefficients $c_{n\nu}$, la série de M. Mittag-Leffler converge et représente $f(x)$, non seulement à l'intérieur de l'étoile principale, mais *aussi en tout point de* L^M où cette branche est holomorphe.

En particulier, si la fonction est méromorphe dans tout le plan, L^M est la frontière complète de l'étoile : la série de M. Mittag-Leffler converge et représente la fonction dans tout le plan, sauf aux pôles (*A. M.*, t. XXVII, p. 79).

M. Painlevé est parvenu, par une méthode toute différente de celle de M. Helge von Koch, à des résultats analogues et même plus généraux. (*C. R.*, 1902, 2e semestre, p. 11; *voir* aussi même Tome, p. 151.)

On peut appeler *étoile holomorphe* celle de M. Mittag-Leffler, *étoile méromorphe* l'ensemble de cette étoile et des lignes L^M, *étoile uniforme* celle à l'intérieur de laquelle la fonction reste uniforme (ces étoiles se rapportant toujours à un élément initial déterminé).

qui convergent uniformément vers $(1-x)^{-1}$ dans tout domaine fermé extérieur au segment $(1, +\infty)$, et une branche uniforme $f(x)$ de fonction analytique définie par l'élément

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \qquad \left[a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}\,dz\right]$$

de former une seconde suite de polynomes

$$\Pi_1(x), \quad \ldots, \quad \Pi_n(x), \quad \ldots \qquad \left[\Pi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu_n} \gamma_{\nu n} a_\nu x^\nu\right]$$

qui tendent vers $f(x)$ dans toute l'étoile appartenant à l'élément $\mathfrak{P}(x)$ et tendent uniformément vers $f(x)$ dans tout domaine fermé intérieur à cette étoile (¹).

D'autre part, le raisonnement qui conduit à la formule de Laurent apprend à déduire de la représentation de la fonction $(1-x)^{-1}$ par une suite de polynomes π_n du type ci-dessus, une représentation de toute fonction holomorphe dans une couronne circulaire au moyen de la limite d'une suite d'expressions analytiques Π_n obtenues cette fois en posant

$$(7)\quad \Pi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu_n} \gamma_{\nu n} a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\nu_n} \gamma_{\nu n} a_{-\nu-1} x^{-\nu} \qquad \left[a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}\,dz\right].$$

Ces remarques ont permis à M. Phragmén de déduire des procédés de M. Mittag-Leffler une extension de la formule de Laurent (²).

Considérons une fonction $f(x)$, holomorphe sur une courbe régulière C, fermée ou non, ne passant ni à l'origine ni à l'infini et coupée au plus en un point par les rayons OM issus de l'origine. Sur chacun des rayons OM qui rencontrent C, il y a de part et

(¹) On peut évidemment définir une série soit par ses éléments u_n, soit par les sommes s_n ($s_n = u_0 + \ldots + u_{n-1}$), par suite introduire les polynomes $p_n(x)$ ou les polynomes $\pi_n(x)$. Ici il y a intérêt à se servir des polynomes π_n, car les coefficients des expressions Π_n se déduisent par une loi simple des coefficients des polynomes π_n.

Avec M. Mittag-Leffler, nous appellerons parfois *expression limite* la limite de toute suite d'éléments ayant une limite.

(²) *C. R.*, 1899, 1ᵉʳ semestre, p. 1434.

d'autre du point d'intersection de OM et de C un segment sur lequel la fonction $f(x)$ reste holomorphe : l'ensemble de ces segments définit un domaine continu D qui va jouer le même rôle que l'étoile principale de M. Mittag-Leffler.

A toute suite de polynomes $\pi_n(x)$ du type (6) *correspond une suite d'expressions analytiques $\Pi_n(x)$ du type* (7), *dont l'expression limite représente $f(x)$ dans* D *et qui converge uniformément vers $f(x)$ dans tout domaine fermé intérieur à* D.

En effet, quels que soient les points x considérés à l'intérieur de D, on peut toujours définir un domaine $\mathfrak{D}$ intérieur à D (sauf peut-être aux extrémités de C) contenant cet ensemble de points, et tel que sa frontière Γ soit coupée par tout rayon issu de l'origine au plus en deux points (points situés de part et d'autre de C), passe par les extrémités de la courbe C si cette courbe n'est pas fermée, et soit formée d'arcs réguliers. Désignons par Γ_i et Γ_e les portions de Γ situées par rapport à C du côté de l'origine et du côté opposé.

Pour tout point x de $\mathfrak{D}$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_e} \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_i} \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

ces intégrales étant prises dans le sens convenable. Or le quotient $x:z$ ne peut devenir réel et supérieur à un quand z est sur Γ_e; même remarque pour $z:x$ lorsque z est sur Γ_i. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_e} \frac{f(z)}{z}\left[\lim_{n=\infty} \pi_n\left(\frac{x}{z}\right)\right]dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_i} \frac{f(z)}{x}\left[\lim_{n=\infty} \pi_n\left(\frac{z}{x}\right)\right]dz,$$

ou bien, à cause des hypothèses sur la convergence uniforme,

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma_e} \frac{f(z)}{z}\pi_n\left(\frac{x}{z}\right)dz + \int_{\Gamma_i} \frac{f(z)}{z}\,\frac{z}{x}\,\pi_n\left(\frac{z}{x}\right)dz\right].$$

Les intégrales le long de Γ_e et de Γ_i peuvent être remplacées par des intégrales prises le long de C, que cette courbe C soit ouverte ou fermée, puisque les courbes C, Γ_e, Γ_i ont mêmes extrémités quand elles sont ouvertes. On a donc bien

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \Pi_n(x),$$

les expressions $\Pi_n(x)$ étant définies par l'égalité (7) qui caractérise la forme choisie pour ces expressions, et par les relations

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}\,dz$$

qui caractérisent la fonction donnée $f(x)$ par rapport à la courbe C.

248. Nous venons de nous occuper de la représentation des fonctions uniformes; passons à l'étude de leurs propriétés et donnons un théorème de M. Jensen relatif aux zéros et aux pôles d'une fonction méromorphe (¹).

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans une circonférence C de rayon r ayant l'origine pour centre (nous supposerons cette fonction *bien déterminée* sur C); désignons par $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ ses zéros et ses pôles intérieurs à C comptés chacun avec leur degré de multiplicité (on peut admettre que l'origine n'en fait pas partie) (²). La formule de M. Jensen va résulter de l'évaluation de l'intégrale

$$(8)\qquad \mathrm{I} = \int_C \log f(z)\frac{dz}{z} = i\int_0^{2\pi} \log[f(re^{i\theta})]\,d\theta \qquad (z = re^{i\theta}),$$

le long du contour C parcouru dans le sens direct : on suppose que la variable z part du point de coordonnées $(r, 0)$, et que l'on a bien fixé au départ la détermination de $\log f(r)$.

L'intégration par parties donne

$$(9)\qquad \mathrm{I} = [\log z \log f(z)]_C - \int_C \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Représentons par $\log r$ un logarithme réel : la partie intégrée a pour valeur

$$2\pi i[\log f(r) + (n-m)\log r] - 4(n-m)\pi^2$$

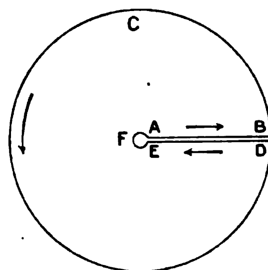
(¹) *Cf.* JENSEN, *A. M.*, t. XXII, p. 362. — PETERSEN, *A. M.*, t. XXIII. — La démonstration si simple que nous donnons ici est due à M. GOURSAT, *B. D.*, 1902, p. 299.

(²) Si l'origine était un zéro ou un pôle de $f(x)$, on raisonnerait sur la fonction $x^p f(x)$, p désignant un entier négatif ou positif égal à l'ordre du zéro ou du pôle.

puisque $\log z$ et $\log f(z)$ augmentent respectivement de $2\pi i$ et de $2(n-m)\pi i$ quand z décrit le contour C.

Dans la formule (9), la fonction sous le signe d'intégration est méromorphe dans le contour ABCDEFA formé par la circonférence C, une circonférence γ de rayon très petit entourant l'origine, et deux segments infiniment voisins tendant à se confondre avec la partie positive de l'axe réel (*fig.* 5). Appliquons le

Fig. 5.



théorème des résidus (Ire Partie, p. 282) : l'intégrale prise le long de γ tend vers zéro avec le rayon de γ, puisque l'origine n'est ni un zéro, ni un pôle pour $f(z)$; la différence des intégrales prises le long des deux segments de l'axe réel parcourus en sens inverses a pour limite $2\pi i[\log f(0) - \log f(r)]$. Il vient donc (Ire Partie, p. 284),

$$\int_C \log z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + 2\pi i[\log f(0) - \log f(r)] = 2\pi i \log \frac{a_1 \ldots a_n}{b_1 \ldots b_m}$$

(tous les logarithmes ont des déterminations qui résultent de la convention faite au départ).

Portons cette valeur de l'intégrale dans l'égalité (9); puis, en nous aidant de la formule (8), égalons les coefficients de i dans les deux membres. La relation obtenue

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \log\left| r^{n-m}\frac{b_1 \ldots b_m}{a_1 \ldots a_n}\right|,$$

où ne figurent que des logarithmes ordinaires, est la *formule de M. Jensen*. On en déduit, en désignant par $N(r)$ le maximum du module de la fonction $f(x)$ sur la circonférence C [et en suppo-

sant $f(0) = 1$], l'inégalité souvent utile

$$\left|\frac{b_1 \ldots b_m}{a_1 \ldots a_n}\right| < \frac{N(r)}{r^{n-m}}.$$

Quand la fonction $f(x)$ est entière, l'inégalité se réduit à

$$\frac{1}{|a_1 \ldots a_n|} < \frac{N(r)}{r^n};$$

elle est alors vérifiée pour toutes les valeurs de r et de l'indice n correspondant.

§ III. — Série de Lagrange.

249. Soient a et α deux paramètres et $f(x)$ une fonction analytique uniforme dans un domaine $\mathfrak{D}$, régulière en tout point de ce domaine. Lagrange [1] a établi une formule célèbre qui permet de représenter par une série, ordonnée suivant les puissances de α, une racine convenable de l'équation

$$(1) \qquad F(x) = x - a - \alpha f(x) = 0,$$

et même une fonction holomorphe quelconque de cette racine [2]. Aujourd'hui de nombreuses méthodes permettent d'obtenir le développement trouvé par Lagrange, de distinguer nettement la

---

(1) *Mémoires de l'Acad. de Berlin*, t. XXIV, p. 251; 1770 (*Œuvres*, édit. Serret, t. III, p. 24) et *Résolution des équations numériques*, Note XI (*Œuvres*, t. VIII, p. 262). *Cf.* aussi t. IX, p. 163 (où Lagrange reproduit une démonstration de Laplace, démonstration insuffisante du reste, comme l'a montré Cauchy).

A la fin du XVIIIe siècle, on ne se préoccupait guère de la convergence des développements : comme toujours, c'est Cauchy qui a précisé cette question et a appris dans quels cas la formule de Lagrange converge, en même temps qu'il en donnait plusieurs démonstrations. Ces preuves reposent soit (1827) sur le Calcul des résidus (*Mémoires de l'Institut*, t. VIII, p. 130; 1829), soit encore (1831) sur la Théorie des intégrales définies (*Mémoires sur la Mécanique céleste; Exercices d'Analyse et de Physique*, t. II, édit. de 1841), soit sur des remarques élémentaires sans considérations d'intégrales (*Exercices, etc.*, t. I, p. 269, édit. de 1840). *Cf.* aussi ses rapports sur deux Mémoires de Chio (*C. R.*, 1846, 2e semestre, p. 490; 1852, 1er semestre, p. 304).

C'est l'équation de Képler $u - e \sin u = nt$ qui avait donné naissance au problème : on se proposait de développer l'anomalie excentrique u suivant les puissances de l'excentricité.

(2) Le but de la formule est d'abord de donner une expression simple aux coefficients du développement, développement dont l'existence a été justifiée plus haut. Nous savions déjà représenter par des intégrales les fonctions holomorphes des racines de $F(x)$ (Ire Partie, p. 287).

racine à laquelle il s'applique, de fixer les conditions de sa convergence et une limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on y prend un nombre limité de termes : voici celle qu'a proposée M. Rouché [1].

Désignons par C un contour fermé qui ne sorte pas de $\mathfrak{D}$ et qui renferme le point a à son intérieur. Si l'on a déterminé un nombre positif δ assez petit pour que, dans l'ensemble $|\alpha| < \delta$, on ait en tous les points x de C, l'inégalité

$$|\alpha f(x)| < |x - a|,$$

l'équation (1) a une seule racine à l'intérieur de C, puisque l'équation $x = a$ n'a qu'une racine dans ce contour (Ire Partie, p. 288). C'est à cette racine bien déterminée (racine qui tend vers a quand α tend vers zéro) que s'applique la formule de Lagrange; nous la représenterons par la lettre x, et nous appellerons $\varphi(x)$ une fonction holomorphe arbitraire de cette racine.

Pour obtenir son expression, suivons encore la méthode qui a conduit aux formules de Taylor et de Laurent : envisageons la fonction $\frac{\varphi(z)}{F(z)}$, qui est holomorphe dans C sauf au pôle x, et prenons-en l'intégrale le long de C. Le théorème des résidus donne

$$2\pi i \frac{\varphi(x)}{F'(x)} = \int_C \frac{\varphi(z)}{z - a - \alpha f(z)}\, dz.$$

Le développement du premier membre devant procéder suivant les puissances de α, nous transformerons le second au moyen de l'identité

$$\frac{1}{z - a - \alpha f(z)} = \frac{1}{z - a} + \frac{\alpha f(z)}{(z - a)^2} + \ldots + \frac{\alpha^n f^n(z)}{(z - a)^{n+1}} + \ldots.$$

En vertu des hypothèses, dans le domaine $|\alpha| < \delta$, cette progression converge uniformément sur le contour C; l'uniformité de

---

(1) ROUCHÉ, *J. E. P.*, XXXIXe Cahier, p. 194; 1861. — HERMITE, *Cours, etc.*, 4e édit., p. 182.

Citons encore : CHIO, *C. R.*, 1846 et 1852; *Savants étrangers*, t. XII, p. 340; *Atti della A. d. S. di Torino*, 1871-1872, p. 647 (*voir* aussi au Tome suivant, p. 18, une Note de GENOCCHI). — GENOCCHI, *C. R.*, 1873, 2e semestre, p. 1541. — TCHEBYCHEF, *Œuvres*, t. I, p. 251. — HEINE, *J. de Crelle*, t. 54, p. 388 (il y obtient la formule de Lagrange par le Calcul des variations). — NEKRASSOFF, *M. A.*, t. XXXI, p. 337.

la convergence subsiste, quand on en multiplie les éléments par le facteur borné $\varphi(z)$. On peut donc intégrer la série terme par terme, ce qui donne

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{F'(x)} = J_0 + \alpha J_1 + \ldots + \alpha^n J_n + \ldots \\ \left[J_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{\varphi(z) f^n(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right]. \end{cases}$$

Dans cette formule, les coefficients J_n sont représentés par des intégrales que l'on peut faire disparaître par la méthode habi tuelle (Ire Partie, p. 290). Pour cela, reprenons les égalités

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz, \qquad \varphi^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

et remplaçons-y $\varphi(z)$ par $\varphi(z) f^n(z)$. Il vient

$$J_n = D_a^n \frac{[\varphi(a) f^n(a)]}{n!};$$

d'où la nouvelle formule

$$\text{(B)}\qquad \frac{\varphi(x)}{F'(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D_a^n [\varphi(a) f^n(a)].$$

Pour que cette relation serve au développement d'une fonction holomorphe donnée $\psi(x)$, il faut préalablement y rattacher la fonction $\varphi(x)$ au moyen de l'égalité $\varphi(x) = F'(x)\,\psi(x)$. Par cette substitution, la formule (B) devient

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D_a^n \{\psi(a) f^n(a)[1 - \alpha f'(a)]\}.$$

Mettons cette série sous une forme plus simple; elle peut s'écrire

$$\psi(x) = \psi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D_a^n [\psi(a) f^n(a)] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n!} D_a^n [\psi(a) f^n(a) f'(a)];$$

ou bien, en l'ordonnant par rapport à α (et en remplaçant dans le premier symbole de sommation n par $n+1$),

$$\psi(x) = \psi(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} D_a^n \{[\psi(a) f^{n+1}(a)]' - (n+1)\,\psi(a) f^n(a) f'(a)\},$$

ou bien, en effectuant les réductions dans la parenthèse,

$$\text{(C)} \qquad \psi(x) = \psi(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} D_a^n[\psi'(a) f^{n+1}(a)].$$

250. Laplace a étendu la formule de Lagrange aux fonctions de plusieurs variables. M. Darboux et ensuite Stieltjes ont donné aux résultats une forme simple, en substituant à la fonction dont on cherche le développement le produit de cette fonction par un certain déterminant fonctionnel ([1]).

251. Première application : *Mouvement des planètes.* — Désignons par nt l'anomalie moyenne, par u et ω l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie, par r la distance de la planète au

---

([1]) *Cf.* Darboux, *C. R.*, 1869, 1er semestre, p. 324. Voici les résultats de Stieltjes.

A l'équation $x = a + \alpha f(x)$ correspond le développement (C); en le dérivant par rapport à a, on obtient, après avoir remplacé $n+1$ par n et $\psi'(x)$ par $F(x)$

$$F(x)\frac{dx}{da} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{da^n}[F(a) f^n(a)] :$$

c'est la formule de Lagrange ainsi transformée dont la généralisation est simple.

Supposons que les r variables x, y, z, ... soient liées aux r variables a, b, c, ... par les r équations

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha f(x, y, z, \ldots), \\ y &= b + \beta \varphi(x, y, z, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on en déduira

$$F(x, y, z, \ldots) \begin{vmatrix} \frac{dx}{da} & \frac{dx}{db} & \frac{dx}{dc} & \cdots \\ \frac{dy}{da} & \frac{dy}{db} & \frac{dy}{dc} & \cdots \\ \frac{dz}{da} & \frac{dz}{db} & \frac{dz}{dc} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \cdots \frac{\alpha^n \beta^p \ldots}{n!\,p!\ldots} \frac{d^{n+p+\cdots}[F(a, b, \ldots) f^n(a, b, \ldots) \varphi^p(a, b, \ldots)]}{da^n\, db^p \ldots},$$

$F(x, y, \ldots)$ désignant une fonction arbitraire des racines x, y, ...

Stieltjes obtient cette généralisation par deux méthodes : la première est restée inédite [M. Poincaré l'a rendue rigoureuse à l'aide de sa Théorie des résidus des intégrales doubles (*A. M.*, t. IX, p. 357)]; pour la seconde, *cf.* *A. E. N.*, 1885, p. 92. *Voir* aussi Picard, *Analyse*, t. II, p. 265.

Soleil : les relations fondamantales qui régissent le mouvement des planètes peuvent s'écrire

$$u - e\sin u = nt, \qquad r = a(1 - e\cos u) = \frac{p}{1 + e\cos\omega}.$$

L'application de la formule (C) donne immédiatement u, $\cos u$, r, ω en fonction de nt au moyen de séries entières en e; par exemple, de l'équation de Képler on déduit les développements [1]

$$\begin{aligned} u = nt + e\sin nt &+ \frac{e^2}{2!\,2}\,2\sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{3!\,2^2}(3^2\sin 3nt - 3\sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{4!\,2^3}(4^3\sin 4nt - 4.2^3\sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{5!\,2^4}\left(5^4\sin 5nt - 5.3^4\sin 3nt + \frac{5.4}{1.2}\sin nt\right) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\cos u = \cos nt + \frac{e}{2}(\cos 2nt - 1) + \frac{e^2}{2.2^2}(3\cos 3nt - 3\cos nt) + \ldots.$$

Le premier, Laplace a montré que ces développements convergent tant que e reste inférieure à $0,662743\ldots$.

Seconde application : *Polynomes de Legendre*. — Dans ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes, Legendre a fait connaître les propriétés de fonctions algébriques remarquables, auxquelles on a donné son nom [2]. Il les introduisait en développant suivant les puissances de z la fonction $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, et les représentait par X^n (où n est un indice). Voici comment Jacobi a rattaché leur définition à la formule de Lagrange [3].

---

(1) Pour les détails de ce calcul et de plusieurs autres, *cf.* Lagrange, *Ac. de Berlin*, t. XXV, p. 204; 1771 (*Œuvres*, t. III, p. 113). — Laplace, *Mécanique céleste*, t. I et t. V (supplément). — Cauchy, *loc. cit.* — Hermite, *Cours, etc.*, 4e édit., p. 184.

(2) Legendre, *Savants étrangers*, t. X; *Mémoires de l'Académie*, 1784 et 1789, ou mieux *Exercices de Calcul intégral*, t. II, p. 247 et 263 (édit. de 1817) où les résultats sont groupés. On les obtient simplement sans passer par la formule de Lagrange. *Cf.* Poincaré, *Potentiel newtonien*, p. 44.

(3) Jacobi, *J. de Crelle*, t. 2, p. 223; 1827. *Voir* aussi Cauchy (1827), *Mémoires de l'Institut*, t. VIII, p. 118. — Darboux, *J. M.*, 1878, p. 20.

Remplaçons dans l'équation (1) $f(x)$ par $\frac{x^2-1}{2}$. La racine de l'équation ainsi transformée qui tend vers a, quand α tend vers zéro, a pour expression

$$x = \frac{1-\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}}{\alpha};$$

c'est à elle que se rapporteront les développements. Prenons-les sous la forme (B), et donnons à $\varphi(x)$ la valeur *un*. $F'(x)$ se réduit à $1-\alpha x$; la formule (B) devient donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n D_a^n (a^2-1)^n}{2^n n!}.$$

Les coefficients des diverses puissances de α représentent les polynomes de Legendre : en remplaçant la lettre a par x, on voit qu'ils sont définis par les égalités

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} D_x^n (x^2-1)^n.$$

Il eût été plus difficile de mettre en évidence cette forme si simple en développant directement par la série de Mac-Laurin l'irrationnelle qu'ils servent à représenter ([1]).

§ IV. — EXTENSION DE LA NOTION DE RÉSIDU.

252. Au Livre précédent, nous avons défini avec Cauchy le résidu d'une fonction analytique uniforme $f(x)$ en un *pôle* a :

([1]) Groupons quelques propriétés de ces fonctions, que Jacobi qualifie de *merveilleuses*.

L'équation $X_n = 0$ a ses racines réelles, distinctes, comprises entre -1 et 1.

Entre trois polynomes consécutifs, on a la formule de récurrence

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)X_n + nX_{n-1} = 0.$$

Le polynome X_n satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

On a

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_p \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \gtrless p, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{si } n = p; \end{cases}$$

plus généralement $\int_{-1}^{+} X_n f(x)\, dx$ est nul, quand $f(x)$ est un polynome de

c'est le coefficient du terme en $(x - a)^{-1}$ dans la *partie principale* relative à ce pôle (1).

Le théorème de Laurent permet d'étendre cette définition à toute singularité *isolée* (2), puisqu'il fait correspondre à toute discontinuité de ce type une fonction holomorphe en $(x - a)^{-1}$, caractéristique de la singularité. Il n'y a rien à changer, ni à l'énoncé du théorème des résidus (Ire Partie, p. 282), ni à sa démonstration, car, dans le voisinage de la singularité, on peut écrire

$$f(x) = \mathfrak{P}(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) = \mathfrak{P}(x) + \frac{A_1}{x-a} + D_x Q\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

---

degré inférieur à n (cette propriété caractérise les polynomes de Legendre). Le polynome X_n est le dénominateur de la réduite d'ordre n de la fonction

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} = \log\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right),$$

comme l'ont montré Tchebychef et Heine.

Laplace l'avait représenté par l'intégrale

$$\pm \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

où l'on a choisi arbitrairement la détermination du radical; le signe à prendre devant l'intégrale est le même que celui de la partie réelle de x, partie réelle que l'on suppose différente de zéro, car sur l'axe imaginaire, l'intégrale n'a pas de sens (cet axe est une ligne de discontinuité pour l'intégrale).

De ces polynomes on passe aux fonctions de Laplace (Ire Partie, p. 196), en remplaçant x par $\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos A$ (qui est l'expression du troisième côté d'un triangle sphérique, dont les deux autres φ et θ comprennent l'angle A).

L'expression explicite des polynomes X_n est

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right].$$

Cf. LEGENDRE, *loc. cit.* — HERMITE, *Cours, etc.*, p. 113 et 194. — JORDAN, *Analyse*, t. II, p. 289, etc.

(1) CAUCHY, *Œuvres*, 2e série, t. VI, p. 24 et 141; t. VII, p. 291; t. VIII, p. 196, etc.

(2) Nous supposons cette singularité isolée de toute autre discontinuité, même polaire (Ire Partie, p. 60).

Nous verrons plus tard que le résidu d'un point singulier isolé d'une fonction uniforme, qu'il soit pôle ou point essentiel, fournit une *période* pour l'intégrale d'une telle fonction.

$Q\left(\frac{1}{x-a}\right)$ représentant une fonction uniforme, et par suite décomposer encore l'intégrale qui intervient dans cette démonstration en trois parties, dont une seule (celle qui renferme le résidu A_1) peut ne pas être nulle.

Remarquons seulement que, si le *calcul numérique* du résidu est facile dans le cas du pôle ([1]), il est, en général, impossible de l'effectuer par des opérations élémentaires quand il s'agit d'un point essentiel.

De cette définition du résidu d'une fonction analytique uniforme, relatif à une singularité *isolée* a, il résulte qu'on peut le représenter par l'intégrale

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int f(x)\,dx,$$

cette intégrale étant prise dans le sens direct le long d'une circonférence C_a n'ayant à son intérieur que la seule discontinuité a.

Cette remarque conduit à étendre la notion de résidu aux points singuliers et même aux ensembles de singularités de nature quelconque. Étant donnée une fonction $f(x)$, on dira dans tous les

---

([1]) Pour calculer le résidu d'une fonction $f(x)$ relatif à un *pôle simple* a, on met la fonction sous la forme $\varphi(x):\psi(x)$, $\varphi(x)$ étant différent de zéro en a, et $\psi(x)$ étant une fonction holomorphe qui admet la racine simple a; dès lors, le résidu R_a a pour valeur $\varphi(a):\psi'(a)$.

Dans le cas du pôle d'ordre n, on peut poser $x=a+h$ et chercher directement le coefficient du terme en h^{-1} dans le développement de $f(a+h)$ suivant les puissances négatives et positives de h. On peut aussi, comme dans la décomposition des fractions rationnelles, appliquer la formule

$$R_a=\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}[f(x)(x-a)^n]_{x=a},$$

qui résulte de la comparaison des égalités

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}\qquad [\varphi(a)\gtrless 0],$$

$$\varphi(x)=\varphi(a)+(x-a)\varphi'(a)+\dots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}\varphi^n[a+\theta(x-a)].$$

cas que *le résidu de cette fonction relatif à une singularité ou à un ensemble de singularités est défini par l'intégrale* (1), cette intégrale étant prise dans le sens positif le long de la frontière d'un domaine contenant cet ensemble de singularités, comme nous allons l'expliquer.

Cette généralisation est naturelle, car la propriété caractéristique des résidus (Ire Partie, p. 282) s'applique aux résidus ainsi envisagés.

253. Prenons d'abord un point singulier non isolé, à distance finie, d'une fonction analytique uniforme. L'intégrale (1) varie avec le rayon de la circonférence C_a : on ne peut fixer de nombre r tel qu'elle ne change plus, quand le rayon de C_a diminue à partir de r. Mais à toute circonférence de rayon déterminé correspond une intégrale (1) déterminée : elle représentera par définition le résidu relatif à l'ensemble des singularités intérieures à ce cercle [1].

De même pour obtenir le résidu relatif à une ligne singulière ou à un espace lacunaire, sans point commun avec un autre ensemble de singularités, on prend pour contour C_a une courbe fermée entourant cette ligne ou la frontière de cet espace lacunaire [2].

254. Envisageons maintenant le point à l'infini, et supposons d'abord que ce point soit un point ordinaire ou une singularité *isolée*. On peut alors tracer une circonférence C de rayon assez grand pour que les singularités de la fonction, à distance finie, soient toutes à son intérieur : la région du plan extérieure à C formera le domaine du point infini; un mobile en parcourra la frontière dans le sens positif, lorsqu'il se déplacera de manière à avoir à sa gauche le domaine entouré.

D'après la règle énoncée, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(x)\,dx,$$

---

(1) *Cf.* GUICHARD, *A. E. N.*, 1883, p. 315 (*voir* au n° 296, note, une classification des singularités).

(2) PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, B., p. 118.

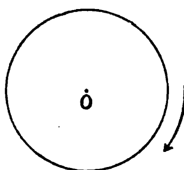
prise le long de C dans le sens de la flèche (*fig.* 6), représentera le résidu R_∞ du point infini, que ce point soit singulier *ou non.*

De là divers procédés, en dehors du calcul direct de l'intégrale ci-dessus, pour l'évaluation de ce résidu. Ainsi :

1° *Le résidu est égal au coefficient du terme en x^{-1}, changé de signe, dans le développement de la fonction suivant les puissances négatives et positives de x.*

En effet, à l'extérieur de la circonférence C, la fonction $f(x)$

Fig. 6.



est régulière, sauf peut-être à l'infini; on peut donc, à l'extérieur de ce cercle, lui appliquer la formule de Laurent

$$f(x) = \sum_{\nu=-\left\{\begin{smallmatrix} n \\ \infty \end{smallmatrix}\right.}^{+\infty} a_\nu x^\nu \qquad (n \gtreqless 0).$$

On en déduit, en intégrant le long de la circonférence C dans le sens indiqué,

$$R_\infty = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum a_\nu x^\nu \, dx.$$

Il suffit de s'occuper du terme $a_{-1}x^{-1}$; on a donc bien

$$R_\infty = -a_{-1}.$$

En particulier, dans le cas du polynome, le résidu du point à l'infini (qui est un pôle) est nul.

2° *La somme des résidus relatifs aux singularités à distance finie* $\left(\sum R\right)$ *et du résidu du point à l'infini est nulle* [1].

---

[1] Ce théorème s'étend à une surface de Riemann. Soient $f(x, y) = 0$ l'équation qui la définit, et v une fonction uniforme du point analytique (x, y), n'ayant qu'un nombre fini de singularités (polaires ou essentielles). *La somme des résidus de la fonction v*, en tous les points de la surface de Riemann, à distance finie ou infinie, *est nulle.*

En effet, le théorème ordinaire des résidus donne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(x)\,dx = -\sum R,$$

la circonférence C étant toujours parcourue dans le sens de la flèche, et par suite

$$R_x = -\sum R.$$

Si le point à l'infini est une singularité *non isolée,* la fonction a alors par exemple une ou plusieurs lignes singulières L ayant des points à l'infini. Dans ce cas, on prendra pour frontière C du domaine du point à l'infini un contour fermé entourant toutes les singularités sauf L, et on la parcourra dans le sens direct relativement au point à l'infini (sens de la flèche). On voit que la somme de tous les résidus est encore nulle.

Remarquons enfin que si, en tout point *ordinaire à distance finie,* le résidu d'une fonction est nul, il n'en est pas de même à l'infini; ainsi la fonction $\frac{x-a}{x-b}$, régulière à l'infini, a en ce point pour résidu $a - b$.

255. D'après les considérations précédentes, pour définir le résidu d'une fonction uniforme ou *multiforme* relatif à un point ordinaire ou singulier, à distance finie ou infinie, il suffit de définir la courbe C avoisinant ce point (nous avons appelé *domaine de ce point* la région qu'elle limite), et d'avoir recours à l'intégrale (1).

Prenons une fonction algébrique y de x, racine d'une équation $f(x, y) = 0$, ou plus généralement une fonction v de x et y, *uniforme* sur la surface de Riemann correspondant à l'équation donnée, c'est-à-dire ne prenant qu'une valeur en chaque point (x, y) de cette surface.

1° Soit (x_0, y_0) un point ordinaire de cette surface : le domaine de ce point sera formé par les points de la surface situés sur le même feuillet que le point (x_0, y_0), à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et de rayon ρ assez petit pour qu'il ne renferme aucun point singulier de la fonction algébrique ([1]).

([1]) Notons qu'une *fonction uniforme d'un point analytique* (x, y) est dans un pareil domaine une *fonction uniforme de* x.

Ce point ordinaire de la surface peut être pour la fonction v un point ordinaire ou singulier. Si le point est ordinaire, le résidu est nul. S'il est singulier, supposons-le isolé. La fonction v est alors développable dans le voisinage de ce point par la formule de Laurent, puisque dans ce domaine v est une fonction uniforme de x, avec la singularité isolée x_0; on a ainsi

$$v = \sum_{\nu=-\left\{\begin{smallmatrix} n \\ \infty \end{smallmatrix}\right.}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu,$$

suivant que la singularité est polaire ou essentielle. Dans les deux cas, a_{-1} est le résidu cherché.

2° Soit (x_0, y_0) un point de ramification de la surface de Riemann, autour duquel p feuillets s'échangent. Le domaine de ce point sera l'ensemble des points, appartenant aux p feuillets, dont la distance au point x_0 ne dépasse pas le nombre ρ : sa frontière est formée de p circonférences égales et superposées que l'on doit parcourir en changeant de feuillet, dans l'ordre voulu, après chaque circulation.

Pour calculer le résidu, on remarque que les p déterminations de y sont fournies par des séries de la forme (Ire Partie, p. 294)

$$y - y_0 = \alpha_1 (x - x_0)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 (x - x_0)^{\frac{2}{p}} + \ldots.$$

Posons $x - x_0 = x'^p$; chaque racine y, et par suite v, est fonction uniforme de x'. Si, dans le voisinage du point $x' = 0$, la fonction v est développable en série entière par rapport à x', le point x_0 sera un point ordinaire pour cette fonction v. Dans le cas contraire, x_0 sera un point singulier. Supposons-le isolé : alors, la formule de Laurent est applicable pour des valeurs suffisamment petites de x'; elle donne, suivant que l'on a affaire à un pôle ou à un point essentiel,

$$v = \sum_{\nu=-\left\{\begin{smallmatrix} n \\ \infty \end{smallmatrix}\right.}^{+\infty} a_\nu x'^\nu = \sum_{\nu=-\left\{\begin{smallmatrix} n \\ \infty \end{smallmatrix}\right.}^{+\infty} a_\nu (x - x_0)^{\frac{\nu}{p}}.$$

Dans les deux cas, le résidu a pour valeur pa_{-p}, puisque, dans l'intégration à laquelle conduit la définition du résidu, tous les

termes provenant du développement ci-dessus, à l'exception du terme en $(x - x_0)^{-1}$, ont des intégrales nulles.

Des considérations analogues permettent le calcul du résidu du point à l'infini, que ce point soit ordinaire ou singulier sur la surface de Riemann, lorsque ce point est un point ordinaire ou un point singulier isolé pour la fonction v.

256. La notion d'*ordre* peut être généralisée, comme l'a été celle de résidu, et, d'après le même principe, c'est-à-dire en rattachant sa définition à celle d'une intégrale.

Quand un point est pour une fonction uniforme un point ordinaire (sans être une racine), une racine ou un pôle, on dit que l'ordre de la fonction *en ce point* est égal à zéro, au degré de multiplicité de la racine, au degré d'infinitude du pôle changé de signe (Ire Partie, p. 61, note). Par suite, l'ordre *dans un domaine* d'une fonction $f(x)$ méromorphe dans ce domaine est regardé comme égal à la somme des ordres de la fonction aux différents points du domaine, ou encore à l'excès du nombre des racines sur le nombre des pôles. C'est dire (Ire Partie, p. 288) que l'ordre de cette fonction en un point ou dans un domaine est représenté par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx, \tag{2}$$

prise dans le sens positif le long d'une circonférence entourant le point ou le long de la frontière du domaine considéré.

Cette intégrale (2) servira de définition à l'ordre d'une fonction *non méromorphe* relativement à un point singulier de nature quelconque, à une ligne singulière, à un espace lacunaire : on la prendra le long d'un contour fermé entourant la singularité considérée.

Comme pour les fonctions méromorphes [1] *la somme des ordres d'une fonction analytique uniforme, à l'intérieur d'un domaine, est égale et de signe contraire à la somme des ordres à l'extérieur de ce domaine.*

---

[1] Il est évident que l'ordre ne représente plus la différence entre le nombre des zéros et le nombre des pôles. L'intégrale qui le définit varie avec le contour; par exemple, s'il s'agit d'un point singulier non isolé, l'ordre comme le résidu varie avec le rayon du cercle entourant la singularité.

Cf. GUICHARD, *A. E. N.*, 1883, p. 315. — PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, p. 123.

Par suite, dans tout le plan, la somme des ordres d'une pareille fonction est nulle.

257. Quand on connaît la nature des singularités d'une fonction à l'intérieur d'un contour, les remarques précédentes permettent dans certains cas de déterminer le nombre de ses racines.

Considérons, par exemple, une fraction rationnelle. Elle n'a à distance finie ou infinie d'autres singularités que des pôles. Or, la somme de ses ordres est nulle. Donc le nombre total des racines de la fonction est égal au nombre de ses pôles, en tenant compte du point à l'infini (qui peut être un zéro, un pôle, ou un point ordinaire).

En particulier, tout polynome de degré m a m racines, puisqu'il a pour unique singularité le point à l'infini, et que ce point est un pôle d'ordre m (1).

On en conclut aussi que le nombre des racines de l'équation $f(x) - c = 0$, où c désigne une constante arbitraire et $f(x)$ une fraction rationnelle, est égal au nombre des pôles de cette fraction. Donc une fraction rationnelle prend toute valeur, *finie ou infinie,* le même nombre de fois.

§ V. — Application a l'évaluation des intégrales définies.

258. Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires. Calculer une intégrale définie portant sur une fonction réelle $f(x)$

---

(1) Voici une troisième démonstration du théorème de d'Alembert (Ire Partie, p. 287) reposant sur le calcul direct du résidu du point à l'infini.

Traçons une circonférence qui renferme à son intérieur toutes les racines du polynome $P(x)$ de degré m (ce tracé est possible, puisque le polynome ne peut s'annuler pour plus de m valeurs). A l'extérieur de cette circonférence, la fonction $\frac{P'(x)}{P(x)}$ est holomorphe, et peut être développée par la formule de Laurent. On a ainsi

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$$

Le coefficient a_1 est égal à m, comme on le voit en multipliant les deux membres de l'identité par x, et en faisant croître x indéfiniment; donc, le résidu du point à l'infini a pour valeur $-m$. La somme totale des résidus est nulle; donc la somme des résidus de $\frac{P'(x)}{P(x)}$ relatifs aux pôles à distance finie, et par suite, le nombre des zéros de $P(x)$, est égal à m.

d'une variable réelle x, c'est l'évaluer le long d'un segment de l'axe des x. On peut considérer ce segment L comme faisant partie d'une infinité de contours fermés, polygonaux ou curvilignes, dont nous désignerons les autres portions par L', L'', ... Si la fonction $f(z)$ est analytique uniforme dans le domaine limité par un de ces contours, et est *bien déterminée* (Ire Partie, p. 279) sur sa frontière, la somme des intégrales le long des lignes L, L', ..., parcourues dans le sens direct, se ramène à une somme de résidus (Ire Partie, p. 282).

Il arrive souvent que grâce à un choix judicieux du contour, il est plus simple d'évaluer l'intégrale de la fonction donnée le long des lignes L', L'', ... et de calculer les résidus relatifs aux discontinuités intérieures à ce contour, que d'évaluer directement l'intégrale de la fonction donnée le long du seul segment L. Dans ce cas, la théorie des résidus fournit une méthode avantageuse pour la recherche des intégrales définies.

Avant de l'appliquer à des exemples, remarquons que l'intégrale d'une fonction $f(z)$, prise le long d'une circonférence C (ou d'un arc de cercle) ayant l'origine comme centre, a zéro pour limite lorsque $|zf(z)|$ tend lui-même vers zéro sur C. En effet, appelons M une limite supérieure de $|zf(z)|$ sur C; le module de l'intégrale de la fonction $f(z)$, prise le long de la circonférence entière, n'atteint pas $2\pi M$, et, dès lors, il tend vers zéro avec M. On applique fréquemment cette remarque à des circonférences dont le rayon tend vers zéro ou l'infini.

259. Problème I. — *Étant donnés deux polynomes* $P(x)$ *et* $Q(x)$, *évaluer l'intégrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad \left[f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\right].$$

On suppose que l'intégrale a un sens, par suite que le dénominateur de la fraction rationnelle n'a pas de racine réelle, et que son degré surpasse d'au moins deux unités celui du numérateur.

Considérons un segment arbitraire AB de l'axe réel ayant son milieu à l'origine O, et décrivons sur AB comme diamètre une

demi-circonférence C. La fonction $f(z)$ est analytique et uniforme dans le domaine limité par le contour ABCA, et elle est régulière sur ce contour; on a donc

$$\int_{AB} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{BCA} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum R,$$

$\sum R$ désignant la somme des résidus relatifs aux pôles de $f(z)$ intérieurs au contour ABCA.

Lorsque le rayon OB de la circonférence C grandit indéfiniment, la première intégrale a pour limite I; la seconde a pour limite zéro, puisque $|zf(z)|$ tend vers zéro quand $|z|$ croît indéfiniment. L'intégrale cherchée I s'obtient donc en multipliant par $2\pi i$ la somme des résidus relatifs à tous les pôles de $f(z)$ situés au-dessus de l'axe réel.

260. Problème II. — *Évaluer l'intégrale*

$$I = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

α désignant un nombre réel, et $f(\sin x, \cos x)$ une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

Supposons la fonction f choisie de telle façon que l'intégrale ait un sens, et utilisons pour le choix du contour la *périodicité* de la fonction f. En prenant comme contour un rectangle ABCD dont la base AB soit un segment de l'axe réel ayant pour longueur 2π, les intégrales de la fonction $f(\sin z, \cos z)$, évaluées le long de BC et de DA, se détruisent. Cette fonction f étant analytique et uniforme dans le rectangle ABCD, et pouvant être regardée comme régulière sur son périmètre (si elle avait des singularités sur BC et DA, on déplacerait le rectangle d'intégration, en faisant glisser AB sur l'axe réel, ce qui ne changerait pas l'intégrale I), le théorème des résidus donne

$$I = 2\pi i \sum R + \int_0^{2\pi} f(\sin \overline{x + ih}, \cos \overline{x + ih})\, dx,$$

h désignant la hauteur du rectangle, et $\sum R$ la somme des résidus de la fonction f relatifs aux singularités intérieures au rectangle.

Par un choix convenable de h, on rend souvent immédiat le calcul de cette dernière intégrale [1]; tout est donc ramené en ce cas à l'évaluation d'une somme de résidus.

Remarque. — La substitution (e^{xi}, x) transforme l'intégrale rectiligne proposée en une intégrale prise le long d'une circonférence ayant l'origine comme centre et l'unité comme rayon. De là un autre procédé, reposant lui aussi sur le calcul des résidus, qui permet d'obtenir I.

261. Problème III. — *Évaluer l'intégrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx \qquad (a = \alpha + i\beta;\ 0 < \alpha < 1);$$

$P(x)$ *et* $Q(x)$ *sont des polynomes;* $Q(x)$ *n'a pas de racine positive et le degré de* Q *surpasse celui de* P (*sinon, l'intégrale n'aurait pas de sens*).

Utilisons pour le choix du contour la périodicité de e^z, et intégrons le long du périmètre d'un rectangle ABCD, de hauteur 2π, dont la base soit un segment AB de l'axe réel ayant son milieu à l'origine O (B est situé du côté des x positifs).

Quand OB grandit indéfiniment, l'intégrale le long de BC tend vers zéro, puisque α est inférieur à l'unité, et que le degré de $P(x)$ est moindre que celui de $Q(x)$. Quand OA grandit indéfiniment, l'intégrale le long de DA tend vers zéro, d'après l'hypothèse $\alpha > 0$. On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a(x+2\pi i)} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = 2\pi i \sum R,$$

en appelant $\sum R$ la somme des résidus relatifs aux discontinuités

[1] Par exemple, on fait souvent $h = \infty$, parce que $|\sin z|$ dépasse tout nombre donné, quand z décrit une parallèle à l'axe réel rejetée à l'infini. C'est ce que montre la formule

$$\sin z = \frac{e^{xi-h} - e^{-xi+h}}{2i} \qquad (z = x + ih;\ h = \infty).$$

Même remarque pour $\cos z$.

intérieures au rectangle, et, par suite,

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2a\pi i}} \sum R.$$

Remarque. — Les intégrales du type considéré peuvent aussi s'obtenir par la transformation (e^x, x) : on choisit alors comme ligne d'intégration un contour Γ tel que ABCDEFA (*fig.* 5, p. 128), formé par un segment de l'axe réel parcouru deux fois en sens inverses, et deux circonférences décrites de l'origine dont les rayons ε et R tendent respectivement vers zéro et l'infini.

Cherchons directement par ce procédé l'intégrale classique

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \qquad (0 < \alpha < 1),$$

qui se ramènerait au type I par la substitution (x, e^x).

La fonction $z^{\alpha-1}$ a chacune de ses déterminations uniforme dans le domaine qui a pour frontière le contour Γ; après avoir posé $z = re^{i\theta}$, partons de A avec celle dont l'argument est nul.

L'intégrale de la fonction $\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ prise le long de AB a pour limite J, quand ε et R tendent vers 0 et l'∞. Elle tend vers zéro le long de la circonférence de rayon R. Lorsque le point z arrive en D, il a pour argument 2π; par suite $z^{\alpha-1}$ a la valeur $x^{\alpha-1}e^{2\alpha\pi i}$ le long de DE, ce qui donne pour valeur limite de l'intégrale le long de ce segment $-Je^{2\alpha\pi i}$. Enfin l'intégrale le long de la circonférence de rayon ε tend vers zéro. Ainsi la valeur limite de l'intégrale le long du contour Γ se réduit à $J(1 - e^{2\alpha\pi i})$.

Cherchons les résidus.

La détermination que nous considérons, méromorphe dans le contour Γ, a à son intérieur le seul pôle $z = -1 = e^{\pi i}$: le résidu correspondant est $e^{i\pi(\alpha-1)}$ ou $-e^{\alpha\pi i}$.

Le théorème des résidus donne donc

$$J(1 - e^{2\alpha\pi i}) = -2\pi i e^{\alpha\pi i}, \qquad J = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Remarquons enfin que la transformation $\left(x, \frac{x}{1-x}\right)$ ramène l'intégrale J à l'intégrale eulérienne de première espèce $B(\alpha, 1-\alpha)$, ce qui permet de l'exprimer par le produit $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$. (*Voir* Ire Partie, p. 191.)

262. Problème IV. — *Évaluer des intégrales du type*

$$\int_0^\infty f(\sin x, x)\,dx,$$

la fonction $f(\sin x, x)$ *étant rationnelle en* $\sin x$ *et* x.

Pour les obtenir, il n'y a pas de règle générale. Souvent, il sera avantageux de calculer l'intégrale de la fonction $f(e^{iz}, z)$ le long du périmètre d'un rectangle ayant pour base un segment de l'axe réel, et dont les côtés parallèles à l'axe imaginaire (ou l'un de ces côtés) s'éloignent indéfiniment; ou bien encore le long du contour formé par un segment de l'axe réel ayant son milieu à l'origine et une demi-circonférence décrite sur ce segment.

Ainsi, pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

on considère la fonction $\frac{e^{zi}}{z}$. Elle est holomorphe dans le domaine ayant pour frontière une ligne ABCDEFA formée par deux demi-circonférences EFA, DCB ayant l'origine pour centre (nous désignerons leurs rayons par ε et R) et les segments DE, AB de l'axe réel qui joignent les points d'abscisses $-$R et $-\varepsilon$, et les points d'abscisses ε et R; de plus, elle est régulière sur ce contour. Par suite, son intégrale le long de ce contour est nulle.

Or, l'intégrale de la fonction $\frac{e^{zi}}{z}$, prise le long de EFA, a pour limite $-i\pi$, quand ε tend vers zéro.

Son intégrale le long de BCD tend vers zéro avec R^{-1}. En effet, son module a une valeur moindre que celle de l'intégrale

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta,$$

elle-même inférieure (1) à l'intégrale

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\,d\theta,$$

---

(1) En effet, quand θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{\sin\theta}{\theta}$, qui part de la valeur 1 et arrive à la valeur $\frac{2}{\pi}$ *en décroissant toujours*, n'est jamais inférieur à $\frac{2}{\pi}$.

qui tend vers zéro avec R^{-1}, comme le montre l'intégration directe.

La somme des intégrales relatives aux segments DE et AB (les parties réelles se détruisent) a pour limite $2iI$. Il vient donc ([1])

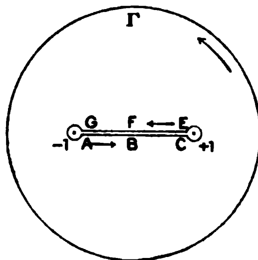
$$2iI = i\pi, \qquad I = \frac{\pi}{2}.$$

263. Problème V. — *Étant donnés un polynome* $P(x)$ *et un radical* $\sqrt{1-x^2}$ *dont la valeur à l'origine est* $+1$, *évaluer l'intégrale*

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \left[f(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{1-z^2}}\right].$$

Des deux déterminations de $f(z)$, celle qui, à l'origine, a la valeur $P(0)$ est analytique et *uniforme* dans l'aire doublement connexe qui a pour frontière une circonférence Γ ayant l'origine pour centre, et la ligne ABCDEFG (*fig.* 7); elle est régulière en

Fig. 7.



tout point de ce domaine et de sa frontière : donc, l'intégrale le long du contour AB...G a même valeur que l'intégrale le long de Γ.

L'intégrale le long de AB...G a pour limite $2I$; car les intégrales le long des circonférences qni entourent les points 1 et -1 tendent vers zéro avec les rayons de ces circonférences, et les déterminations du radical s'échangent lorsqu'on entoure leurs centres. L'intégrale, le long de la circonférence Γ, est indépendante de son rayon $R (R > 1)$; faisons grandir R indéfiniment, et appe-

([1]) Il n'est pas nécessaire de supposer que l'on a démontré directement l'existence de l'intégrale I; les égalités du texte prouvent d'abord que cette intégrale tend vers une limite, et ensuite que cette limite est $\frac{\pi}{2}$.

lons A le coefficient de z^{-1} dans le développement de $f(z)$ en série de Laurent ($|z| > 1$), il vient

$$2I = 2i\pi A, \qquad I = i\pi A.$$

Du reste, pour obtenir A, il n'y a qu'à écrire

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{iz}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{iz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3\ldots\overline{2n-1}}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{z^{2n}} \qquad (|z|>1) \text{ [1]},$$

et à chercher le coefficient du terme en z^{-1} dans le produit de cette série par le polynome $P(z)$. En d'autres termes, A est au signe près le résidu du point infini de la fonction $f(z)$.

264. Problème VI. — *Évaluer l'intégrale*

$$I = \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

On suppose que l'intégrale a un sens, et, par suite, que le point a n'est pas situé sur le segment $(-1, +1)$; $\sqrt{1-x^2}$ représente la détermination du radical qui, à l'origine, a la valeur $+1$.

Reprenons l'aire à double contour qui nous a servi dans le problème précédent (*fig.* 7), et choisissons assez grand le rayon de la circonférence Γ, pour qu'elle renferme le point a à son intérieur. La détermination de la fonction $\dfrac{1}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}$, qui a à l'origine, au-dessous de la coupure $(-1, +1)$, la valeur $\dfrac{1}{a}$, est analytique et uniforme dans cette aire, et elle est régulière sur son contour; à son intérieur, elle admet le pôle a. Le long de la circonférence Γ et des circonférences qui entourent les points -1 et $+1$, l'intégrale tend vers zéro, puisque l'on a [2]

$$\lim\left|\frac{z}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}\right|_{z=\infty} = 0, \qquad \lim\left|\frac{1-z}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}\right|_{|z-1|=0} = 0.$$

---

[1] Pour vérifier que ce développement est bien celui de la *détermination* de $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ qui a à l'origine, au-dessous de la coupure $(-1, +1)$, la valeur $+1$, on peut rechercher directement, comme dans la note (1) p. 150, la valeur de cette détermination en D, et comparer les résultats; ou bien, plus simplement, remarquer que si $P(x) = 1$, I doit avoir une valeur positive.

[2] Pour la circonférence Γ, le calcul direct du résidu du point infini conduit

D'où la relation

$$2I - 2i\pi R_a = 0,$$

où le résidu R_a a pour valeur $(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$, cette notation désignant la détermination qu'a au point a la fonction $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$, rendue uniforme par la coupure $(-1, +1)$. En choisissant ainsi la valeur du radical, on pourra écrire

$$I = \frac{i\pi}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Remarque. — Quand a est réel, la définition de l'intégrale I montre qu'elle est positive ou négative suivant que a est supérieur à 1 ou inférieur à -1, ce qui détermine sans autre discussion le signe à prendre devant $\sqrt{a^2-1}$ (¹).

Quand a est imaginaire, au lieu de suivre par continuité $\sqrt{1-z^2}$ depuis le point $z=0$, pour avoir sa valeur en a, on peut raisonner comme il suit :

Posons $a = \alpha + i\beta$, et appelons $A + iB$ la détermination de $\sqrt{a^2-1}$ qui sert de solution au problème. On a

$$I = \frac{\pi}{A+iB} = \frac{\pi(A-iB)}{A^2+B^2}$$
$$= \int_{-1}^{+1} \frac{(\alpha-x)\,dx}{(\overline{\alpha-x}^2+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} - i\int_{-1}^{+1} \frac{\beta\,dx}{(\overline{\alpha-x}^2+\beta^2)\sqrt{1-x^2}};$$

à la même conclusion, car la multiplication membre à membre (Iʳᵉ Partie, p. 136, note) des égalités

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \ldots \qquad (|z| > a),$$

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{iz} + \frac{1}{2}\frac{1}{iz^3} + \ldots \qquad (|z| > 1),$$

montre que le produit n'a pas de terme en z^{-1}, et, par suite, que ce résidu est nul.

(¹) Voici comment raisonner pour obtenir directement *par continuité*, après avoir fait la coupure $(-1, +1)$, la valeur de $\sqrt{1-z^2}$ en un point réel a, situé à droite du point 1.

D'après l'énoncé, lorsqu'on parcourt le contour ABCDEFG (*fig.* 7), le radical a respectivement aux points B et F des valeurs très voisines de $+1$ et -1; ou même les valeurs $+1$ et -1 en supposant que les points B et F coïncident avec l'origine. Faisons cette hypothèse, et partons de B avec la valeur $+1$. Le long

la seconde intégrale a le signe de β, donc en évaluant $\sqrt{a^2-1}$ on choisira la détermination pour laquelle B a le signe de β.

265. Problème VII. — *Calculer la valeur des intégrales de Fresnel*

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx, \quad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Soit O l'origine des coordonnées. La fonction entière e^{-z^2} est holomorphe dans le secteur circulaire limité par un segment OA de longueur R situé sur l'axe réel, un arc de cercle ABC de centre O et de rayon R dont l'angle au centre est de 45°, le rayon CO ; donc, son intégrale le long de la frontière de ce secteur est nulle.

Le long de OA, on a

$$z = x.$$

Faisons croître R indéfiniment; l'intégrale le long de OA a pour limite l'intégrale de Poisson

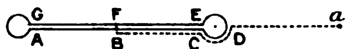
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

L'intégrale le long de l'arc ABC tend vers zéro. En effet, sur cet arc le module d'un élément est égal à $Re^{-R^2\cos 2\theta}$, et, par suite,

---

de BC (*fig.* 8), on posera $x = 1 - \rho e^{i\theta}$, et l'on fera varier ρ de 1 à un nombre

Fig. 8.



très petit ε ($\theta = 0$). Quand on arrive en C, on laisse ρ constant, et l'on fait croître θ de 0 à π, afin de décrire la demi-circonférence CD. On a donc en D

$$x = 1 - \rho e^{i\pi}.$$

Pour continuer à décrire l'axe réel, on fait varier ρ de ε à $a-1$. On parvient ainsi en a avec la valeur

$$\sqrt{1-x} = e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho} = i\sqrt{a-1}$$

d'où finalement

$$(\sqrt{1-x^2})_{x=a} = i\sqrt{a^2-1}.$$

C'est aussi la valeur que l'on aurait obtenue en partant du point F avec la valeur -1.

celui de l'intégrale que nous considérons n'atteint pas

$$R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}d\theta \quad \text{ou} \quad \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\theta}d\theta$$

$\left[\text{on a passé de la première forme à la seconde par la substitution } \left(2\theta, \frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$. On obtient une limite supérieure de cette intégrale en y remplaçant $\sin\theta$ par $\frac{2\theta}{\pi}$ (p. 147, note), ce qui montre qu'elle est nulle avec R^{-1}.

Enfin, le long de CO, on doit poser

$$z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rho, \qquad e^{-z^2} = e^{-i\rho^2} = \cos\rho^2 - i\sin\rho^2;$$

l'intégrale le long de CO a donc pour valeur limite

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_R^0 (\cos\rho^2 - i\sin\rho^2)(1+i)\,d\rho.$$

Les valeurs limites des intégrales prises le long de OA et de OC sont les mêmes; par suite, en égalant leurs parties réelles et leurs parties imaginaires et en remplaçant ρ par x, il vient

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§ VI. — Application à l'intégration des équations différentielles.

266. Les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

$$(1) \qquad f(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0$$

ont été résolues pour la première fois par Euler et par d'Alembert. Cauchy en a obtenu l'intégrale générale en introduisant, lui aussi, l'équation dite *caractéristique*

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0;$$

voici comment il a rattaché sa méthode à la théorie des résidus (¹).

(¹) Cauchy, *Œuvres*, 2ᵉ série, t. VI, p. 252; t. VII, p. 40 et 255; *Exercices d'Analyse et de Physique*, t. I, p. 53 (édit. de 1840). — Hermite, *B. D.*, 1879, p. 311.

Appelons $p(z)$ un polynome arbitraire de degré $n-1$, et C un contour fermé quelconque, ne passant par aucune des racines du polynome $f(r)$. L'intégrale

$$(2) \qquad y = \int_C e^{zx} \frac{p(z)}{f(z)} dz \qquad \left[e^{zx} \frac{p(z)}{f(z)} = F(z) \right]$$

dépend de la variable x et du contour C. *Cette intégrale est une solution de l'équation* (1) *quel que soit le contour* C; *pour un choix convenable de ce contour, elle représente l'intégrale générale.*

En effet, pour *vérifier* la première partie, formons les dérivées par rapport à x de l'intégrale (2) (Ire Partie, p. 268); en portant leurs valeurs dans le premier membre de l'équation (1), ce premier membre devient

$$\int_C e^{zx} \frac{p(z)}{f(z)} (z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)\, dz \quad \text{ou} \quad \int_C e^{zx} p(z)\, dz.$$

Cette expression est nulle, quel que soit x, puisque la fonction $e^{zx} p(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C; donc l'intégrale (2) satisfait bien à l'équation différentielle considérée.

Il est facile de retrouver la forme habituelle des *solutions particulières*. Soit r_k une racine de l'équation caractéristique, et dès lors un pôle de $F(z)$. Prenons pour contour C une ligne fermée extérieure à toutes les racines de $f(r)$ sauf à la racine r_k; l'intégrale (2) devient égale au produit de $2\pi i$ par le résidu R_k relatif à r_k. Calculons R_k en supposant d'abord r_k racine simple. La règle classique donne

$$R_k = e^{r_k x} \frac{p(r_k)}{f'(r_k)} = a e^{r_k x},$$

a désignant une constante; telle est la valeur de l'intégrale (2), au facteur $2\pi i$ près.

Supposons r_k racine d'ordre q. Alors, pour avoir R_k, je pose $z = r_k + h$ et je cherche le coefficient de h^{-1} dans le développement de $F(r_k + h)$. Il vient

$$F(r_k + h) = e^{r_k x} \left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1.2} + \ldots \right) \frac{p(r_k) + h\, p'(r_k) + \ldots}{f^q(r_k) \frac{h^q}{q!} + \ldots}.$$

Ce dernier quotient est de la forme

$$\frac{a}{h^q}+\frac{a'}{h^{q-1}}+\ldots,$$

et par suite le résidu cherché, ou encore l'intégrale (2) a une expression de la forme

$$e^{r_k x}(bx^{q-1}+b_1 x^{q-2}+\ldots+b_{q-1}),$$

les coefficients b, b_1, ..., b_{q-1} représentant des constantes. On retrouve bien dans les deux cas les solutions classiques.

Pour que l'intégrale (2) représente l'*intégrale générale,* il suffit de prendre comme contour une ligne C qui renferme, à son intérieur, toutes les racines r_k de l'équation caractéristique.

En effet, d'après le calcul que nous venons de faire, l'intégrale (2) a alors comme valeur

$$(2') \qquad y=\sum_k e^{z_k x}\varphi_k(x),$$

$\varphi_k(x)$ désignant un polynome dont le degré est inférieur d'une unité à l'ordre de la racine r_k; c'est la forme connue de l'intégrale générale.

267. *Remarque I.* — On peut vérifier que pour une valeur arbitraire de x, par exemple pour $x=0$, l'intégrale (2) prend ainsi que chacune de ses $n-1$ premières dérivées des valeurs données à l'avance, et par suite prouver directement que c'est l'intégrale générale.

En effet, sur chaque circonférence C de rayon assez grand pour qu'elle renferme à son intérieur toutes les racines du polynome $f(r)$, on a

$$\frac{p(z)}{f(z)}=\frac{c_1}{z}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots,$$

les n premiers coefficients c_1, ..., c_n étant arbitraires, comme ceux du polynome $p(z)$ dont ils dépendent [1]. Or la solution (2)

---

[1] Insistons sur ce point. Les coefficients du quotient des deux polynomes

$$p(z)=\alpha_1 z^{n-1}+\alpha_2 z^{n-2}+\ldots+\alpha_n,\qquad f(z)=z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_n$$

et ses $n-1$ premières dérivées se réduisent, pour $x=0$, aux intégrales

$$\int_C \frac{p(z)}{f(z)}dz,\quad \int_C \frac{z\,p(z)}{f(z)}dz,\quad \ldots,\quad \int_C \frac{z^{n-1}p(z)}{f(z)}dz;$$

sur les circonférences C du type ci-dessus, elles ont respectivement pour valeurs, d'après le théorème des résidus,

$$2i\pi c_1,\quad 2i\pi c_2,\quad \ldots,\quad 2i\pi c_n,$$

elles sont donc égales à n nombres arbitraires.

Remarque II. — Les n constantes d'intégration proviennent des coefficients du polynome arbitraire $p(z)$. Leur nombre ne dépend pourtant pas du degré de ce polynome, en ce sens que l'on complique inutilement les calculs en le prenant de degré supérieur à $n-1$.

En effet, si le degré de $p(z)$ dépassait $n-1$, on pourrait écrire

$$\frac{p(z)}{f(z)} = q(z) + \frac{p_1(z)}{f(z)},$$

$q(z)$ et $p_1(z)$ désignant deux nouveaux polynomes tels que le second soit de degré $n-1$ au plus. L'intégrale (2) se décomposerait en deux autres; celle qui renferme $q(z)$ serait nulle.

268. A la suite de Cauchy [1], M. Darboux [2] a étudié par la méthode précédente le cas où l'équation différentielle linéaire à coefficients constants a *un second membre;* nous supposerons

---

sont des nombres $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ fournis par les égalités

$$c_1 = \alpha_1, \quad c_2 = \alpha_2 - a_1\alpha_1, \quad c_3 = \alpha_3 - a_1\alpha_2 - (a_2 - a_1^2)\alpha_1, \quad \ldots.$$

La *forme* de ces relations montre qu'en disposant convenablement des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on peut de proche en proche déterminer *arbitrairement* les constantes $c_1, \ldots, c_n$.

(1) Cauchy a appliqué sa méthode à l'intégration d'un *système* d'équations différentielles ou aux dérivées partielles à coefficients constants, sans second membre ou avec second membre (*Exercices d'Analyse et de Physique,* t. I, p. 56, 63, 76, édit. de 1840), et même à l'intégration de *quelques* équations différentielles linéaires *à coefficients variables* (*Œuvres,* 2e série, t. VI, p. 317). *Voir* aussi JORDAN, *Analyse,* 1re édition, t. III, p. 164.

(2) *B. D.,* 1879, p. 325.

que ce second membre est le produit d'une exponentielle $e^{\omega x}$ par un polynome $q(x)$.

Considérons donc l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = e^{\omega x}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p),$$

et cherchons à déterminer une fonction $v(z)$ et un contour C tels qu'une intégrale du type

$$(3) \qquad \int_C e^{zx} \frac{v(z)}{f(z)} dz$$

vérifie cette équation.

D'après les calculs faits plus haut, l'intégrale (3) en est une solution, si l'on a identiquement

$$(4) \qquad \int_C e^{zx} v(z)\, dz = e^{\omega x} q(x);$$

par suite $v(z)$ ne doit plus être un polynome. Essayons une fraction rationnelle de la forme

$$v(z) = \frac{\beta_0}{z - \omega} + \frac{\beta_1}{(z-\omega)^2} + \ldots + \frac{\beta_p}{(z-\omega)^{p+1}},$$

et prenons pour contour C une circonférence ayant le point ω à son intérieur et extérieure à toutes les racines de $f(r)$ (sauf à la racine ω, si ω était racine de l'équation caractéristique). Dans ces conditions le premier membre de la relation (4) a pour valeur $2\pi i R_\omega$, R_ω désignant le résidu de la fonction $e^{zx} v(z)$ relatif au pôle ω. Pour évaluer ce résidu, posons $z = \omega + h$, et dans le produit

$$e^{\omega x}\left(1 + hx + \frac{h^2 x^2}{2!} + \ldots\right)\left(\frac{\beta_0}{h} + \frac{\beta_1}{h^2} + \ldots + \frac{\beta_p}{h^{p+1}}\right)$$

cherchons le coefficient du terme en h^{-1}; puis égalons-le au second membre de (4), après l'avoir multiplié par $2\pi i$. Dès lors, pour que (3) soit solution, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$2\pi i\, e^{\omega x}\left(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \frac{\beta_p}{p!} x^p\right) = e^{\omega x}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p),$$

ce qui donne pour valeurs des coefficients β,

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{2\pi i}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi i}, \qquad \ldots, \qquad \beta_p = p!\, \frac{\alpha_p}{2\pi i},$$

et par suite détermine la fraction $v(z)$. Pour donner à la solution correspondante (3) la forme classique, il n'y a qu'à la transformer par le théorème des résidus : on la ramène ainsi au produit de $e^{\omega x}$ par un polynome en x de degré $p+q$, q désignant le nombre des racines de l'équation caractéristique qui sont égales à ω.

269. Ces procédés peuvent être regardés comme des généralisations d'une méthode indiquée par Laplace ([1]) pour ramener aux quadratures la résolution des équations linéaires du type

$$(5)\quad (a_0 x + b_0)\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 x + b_1)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_n x + b_n)y = 0,$$

$a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n$ désignant des constantes.

Représentons par $v(z)$ une fonction de variable complexe, et par C un chemin d'intégration fermé ou ouvert. Peut-on déterminer cette fonction et ce chemin de façon que l'intégrale

$$(6)\qquad y = \int_C v(z) e^{zx}\, dz$$

soit solution de l'équation différentielle (5)?

Pour en décider, substituons dans cette équation l'intégrale (6) et ses dérivées; mais, avant d'y porter les valeurs de xy, xy', ..., transformons-les au moyen de l'intégration par parties, et écrivons

$$x\frac{d^p y}{dx^p} = \int_C z^p v(z) e^{zx} x\, dz = [z^p v(z) e^{zx}]_C - \int_C \frac{d(z^p v)}{dz} e^{zx}\, dz.$$

Le résultat de la substitution sera, en désignant par $p(z)$ et $q(z)$ deux polynomes qui seront en général de degré n,

$$(7)\quad [(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n) v(z) e^{zx}]_C + \int_C \left[p(z)\frac{dv}{dz} + q(z) v\right] e^{zx}\, dz.$$

([1]) Laplace traite même un problème plus général en supposant de degrés quelconques les polynomes multiplicateurs (*Œuvres*, t. VII). — Dans son Mémoire *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, 1885), M. Poincaré a résolu plusieurs difficultés relatives au chemin d'intégration (*voir* spécialement la page 218).

Cf. aussi : PICARD, *Analyse*, t. III, p. 372 et 383. — JORDAN, *Analyse*, 2e édit., t. III, p. 240 et 252).

Pour que cette expression soit nulle, il suffit de déterminer la fonction $v(z)$ de manière à faire disparaître l'intégrale, et de choisir le chemin C de façon que cette fonction v soit nulle aux deux extrémités de C, si C est ouvert, ou bien qu'elle ait même valeur au départ et à l'arrivée si C est fermé.

Pour que l'intégrale s'évanouisse quel que soit x, on est conduit à annuler dans son élément différentiel le facteur indépendant de x, c'est-à-dire à déterminer v par la quadrature

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz} + \frac{q(z)}{p(z)} = 0,$$

ce qui donne, lorsqu'on n'a pas fait d'hypothèse particulière sur les coefficients de l'équation (5),

$$v = e^{\alpha z}(z - c_1)^{\alpha_1}\ldots(z - c_n)^{\alpha_n};$$

$c_1, \ldots, c_n$ désignent les racines du polynome $p(z)$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les résidus de la fraction rationnelle $-\frac{q(z)}{p(z)}$ relatifs à ces racines.

Quant au chemin d'intégration, il suffit de prendre une ligne ouverte joignant deux racines c_i, c_k telles que les résidus correspondants α_i, α_k soient positifs (s'il existe de telles racines), et ne passant par aucune racine c_l à exposant α_l négatif; car la fonction $v(z)$ s'annule aux extrémités d'un pareil chemin.

En faisant varier la ligne d'intégration, on pourra obtenir par ce procédé ou par d'autres plusieurs intégrales particulières; nous laisserons de côté la discussion des cas où elles forment un *système fondamental* de solutions, et par suite, où il est possible d'en déduire l'intégrale générale.

270. Appliquons cette méthode à la recherche de solutions particulières de l'*équation de Bessel* (¹),

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2m\frac{dy}{dx} + xy = 0. \tag{5'}$$

(¹) L'*équation de Bessel* dont nous avons parlé (Iʳᵉ Partie, p. 198) prend la forme que nous lui donnons ici, quand on pose $J = x^p f$; par cette transformation elle devient

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1+2p}{x}\frac{df}{dx} + \left(1 + \frac{p^2 - n^2}{x^2}\right)f = 0,$$

Elle admettra une intégrale de la forme (6), si l'on détermine une fonction $v(z)$ et un chemin C tels que l'expression

$$(7') \qquad [(1+z^2)ve^{zx}]_C - \int_C e^{zx}\left[(1+z^2)\frac{dv}{dz} - 2(m-1)zv\right]dz$$

soit identiquement nulle. Pour obtenir $v(z)$ on doit, d'après la méthode indiquée, effectuer la quadrature

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{2(m-1)z}{1+z^2},$$

qui donne, pour une valeur convenable de la constante d'intégration,

$$v = (1+z^2)^{m-1}.$$

Supposons m réel. *Si m est positif,* on peut prendre comme chemin d'intégration une ligne ouverte joignant les racines $-i$ et $+i$ du binome $1+z^2$; ce qui donne cômme solution particulière l'intégrale définie

$$\int_{-i}^{+i}(1+z^2)^{m-1}e^{zx}\,dz.$$

La substitution (z, iz) la met sous la forme

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{m-1}\cos zx\,dz,$$

car l'intégrale renfermant $\sin zx$ disparaît comme ayant ses éléments égaux deux à deux et de signes contraires : cette solution est holomorphe, et son développement en série entière est facile à obtenir.

Si m est négatif, l'intégrale précédente n'a plus de sens, mais l'intégrale

$$(6') \qquad \int_C (1+z^2)^{m-1}e^{zx}\,dz,$$

prise le long de contours fermés convenables, fournit diverses solutions particulières.

---

et par suite rentre dans le type indiqué dans le texte si l'on pose $p = \pm n$. On voit que l'on passe des intégrales J aux intégrales f en multipliant les intégrales J par x^{-p}; de fait les solutions particulières que nous allons obtenir se ramènent aux *fonctions de Bessel* J_n définies précédemment (pour le détail des calculs, *cf.* JORDAN, *Analyse,* 2ᵉ édit., t. III, p. 261)'

Par exemple, prenons comme ligne C l'ensemble des deux lacets obtenus en partant de l'origine avec la détermination de $(1+z^2)^{m-1}$ qui s'y réduit à $+1$, et en entourant dans le sens positif le point i et dans le sens négatif le point $-i$. La partie intégrée qui figure dans l'expression (7') est alors nulle, car la fonction $(1+z^2)^m e^{zx}$ reprend la valeur 1, après que z a achevé de parcourir les deux lacets (cette fonction se trouve multipliée successivement par deux facteurs exponentiels inverses l'un de l'autre); l'intégrale (6') est donc une solution particulière.

C'est encore une solution particulière lorsque le contour C est une ligne simple partant du point à l'infini dans la direction $-x^{-1}$ et y revenant, après avoir entouré dans le sens direct le segment de l'axe imaginaire compris entre les points i et $-i$, puisque la fonction $(1+z^2)^m e^{zx}$ s'annule au point $z=-\frac{\infty}{x}$, ∞ représentant une quantité réelle infinie et positive.

Remarquons enfin que si m est un *entier* négatif, la partie intégrée dans l'expression (7') est uniforme, et dès lors a une variation nulle le long de tout contour fermé. En ce cas, on prendra comme ligne C un contour fermé quelconque renfermant à son intérieur l'un des points $\pm i$; le long de cette courbe, l'intégrale (6') n'est pas nulle, puisque la fonction $v(z)$ a un pôle à son intérieur. De là, deux solutions particulières, que l'on pourra transformer par le théorème des résidus [1].

§ VII. — Fonctions analytiques de plusieurs variables.

271. Soit $f(x_1, \ldots, x_p)$ une fonction de p variables, définie dans un domaine continu $\mathfrak{D}$ à $2p$ dimensions, formé par l'ensemble de p domaines continus $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p$ chacun à deux dimensions [2]. Au sens de Cauchy, cette fonction est analytique dans $\mathfrak{D}$

---

(1) A ces applications de la théorie des résidus on devrait joindre celles qui concernent l'intégration des équations aux différences partielles; il faudrait montrer tout le parti que Cauchy en a tiré pour obtenir les développements en série relatifs aux fonctions elliptiques (*C. R.*, 1843, 1844), à la fonction perturbatrice, etc.

(2) Pour les fonctions d'une variable comme pour celles de plusieurs variables. on donne aux procédés de Cauchy une plus grande précision en définissant *d'abord* la fonction *dans le voisinage d'un point* (par les conditions de continuité, d'uniformité, de monogénéité dont nous allons parler), *puis en prolongeant* la fonction dans tout son domaine d'existence.

lorsqu'elle est *en général* holomorphe dans $\mathfrak{D}$, en d'autres termes lorsqu'elle est analytique, quel que soit i, dans le domaine $\mathfrak{D}_i$ par rapport à la variable x_i, les autres variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p$ restant fixes dans les domaines $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_{i-1}, \mathfrak{D}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{D}_p$, et, de plus, lorsqu'elle est bornée (¹).

Une fonction analytique est développable en série de puissances, dans le voisinage de tout point où elle est holomorphe (Iʳᵉ Partie, p. 296); réciproquement, une série multiple entière convergente à l'origine est holomorphe dans son domaine de convergence.

Les points *singuliers* de la fonction sont ceux où elle cesse d'être holomorphe ou *régulière* : leur ensemble forme la frontière du domaine d'existence de cette fonction.

Ces résultats découlent de principes ou de calculs déjà exposés. On pourrait aussi les déduire du théorème fondamental de Cauchy étendu aux fonctions de plusieurs variables et de la formule qui en est la conséquence.

Cette seconde méthode exige que l'on ait défini le symbole

$$I = \int_{C_p} dx_p \ldots \int_{C_2} dx_2 \int_{C_1} f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1,$$

$C_1, \ldots, C_p$ représentant des lignes rectifiables, fermées ou ouvertes, intérieures respectivement aux domaines $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p$, et $f(x_1, \ldots, x_p)$ une fonction continue dans leur ensemble $\mathfrak{D}$.

Pour y parvenir, donnons aux points $x_2, \ldots, x_p$ des positions fixes arbitraires respectivement sur les courbes $C_2, \ldots, C_p$; puis évaluons par la méthode habituelle l'intégrale de la fonction $f(x_1, \ldots, x_p)$ le long de la courbe C_1 : cette intégrale simple est une fonction de $x_2, \ldots, x_p$ (et du contour C_1) que nous désignerons par $f_1(x_2, \ldots, x_p)$.

Donnons ensuite aux points $x_3, \ldots, x_p$ des positions fixes sur les courbes $C_3, \ldots, C_p$ et désignons par $f_2(x_3, \ldots, x_p)$ l'intégrale de la fonction $f_1(x_2, \ldots, x_p)$ prise le long de la courbe C_2. En répétant encore $p-2$ fois une opération analogue, on obtient,

(¹) La fonction serait-elle analytique, alors même que, dans la définition ci-dessus, on n'exigerait pas qu'elle fût *bornée?* M. Osgood discute cette question, sans la trancher, dans les deux Notes citées précédemment (Iʳᵉ Partie, p. 330).

après p intégrations, une expression bien déterminée qui sert de définition à l'intégrale I.

La valeur de cette intégrale dépend en général des chemins d'intégration $C_1, \ldots, C_p$ (¹). Supposons la fonction $f(x_1, \ldots, x_p)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$, et prenons comme lignes $C_1, \ldots, C_p$ des contours *fermés* arbitraires intérieurs à $\mathfrak{D}$ [contours rectifiables et *simples* (Iʳᵉ Partie, 270)]. Pour étendre aux fonctions de plusieurs variables le théorème fondamental de Cauchy et obtenir la formule

$$\int_{C_p} dx_p \ldots \int_{C_2} dx_2 \int_{C_1} f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 = 0,$$

valable quand $\mathfrak{D}$ est simplement connexe, il suffit d'appliquer le théorème analogue relatif aux fonctions d'une variable.

La généralisation de l'intégrale dite de Cauchy en est aussi une conséquence (²). En effet, soit $(x_1, \ldots, x_p)$ un point arbitraire intérieur aux contours $C_1, \ldots, C_p$: la formule classique (Iʳᵉ Partie, p. 281) appliquée successivement à p fonctions d'une variable donne

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{f(x_1, \ldots, x_{p-1}, z_p)}{z_p - x_p}\, dz_p,$$

$$f(x_1, \ldots, x_{p-1}, z_p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{p-1}} \frac{f(x_1, \ldots, x_{p-2}, z_{p-1}, z_p)}{z_{p-1} - x_{p-1}}\, dz_{p-1},$$

. . . . ,

$$f(x_1, z_2, \ldots, z_p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z_1, \ldots, z_p)}{z_1 - x_1}\, dz_1,$$

et par suite

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{C_p} \frac{dz_p}{z_p - x_p} \cdots \int_{C_1} f(z_1, \ldots, z_p) \frac{dz_1}{z_1 - x_1};$$

c'est la formule cherchée.

(¹) Elle ne dépend pas de l'*ordre* des intégrations, comme on s'en assure en séparant dans l'intégrale I la partie réelle de la partie imaginaire.

(²) Cette généralisation était connue de Cauchy, car il obtient les développements des fonctions holomorphes de plusieurs variables en séries de puissances, soit par le procédé indiqué précédemment (Iʳᵉ Partie, p. 296), soit directement par la considération d'intégrales (*Exercices d'Analyse et de Physique*, t. II, p. 55, édit. de 1841). — *Cf.* aussi : LAURENT, *Analyse*, t. IV, p. 5. — JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. I, p. 197.

On en déduit (Ire Partie, p. 282)

$$\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_p} f}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_p^{\mu_p}}$$
$$= \frac{\mu_1!\dots\mu_p!}{(2\pi i)^p}\int_{C_p}\frac{dz_p}{(z_p-x_p)^{\mu_p+1}}\cdots\int_{C_1} f(z_1,\dots,z_p)\frac{dz_1}{(z_1-x_1)^{\mu_1+1}},$$

ce qui montre que les dérivées de tous les ordres de la fonction analytique f sont elles aussi analytiques dans $\mathfrak{D}$.

Imaginons que les contours $C_1, \dots, C_p$ soient des circonférences ayant pour centres un point $(a_1, \dots, a_p)$ de $\mathfrak{D}$ et pour rayons des nombres $\rho_1, \dots, \rho_p$: désignons par N une limite supérieure du module de f sur ces circonférences. De la dernière formule on déduit

$$\left|\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_p} f}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_p^{\mu_p}}\right|_{(x=a)} \leqq \mu_1!\dots\mu_p!\,\mathrm{N}\rho_1^{-\mu_1}\dots\rho_p^{-\mu_p};$$

on retrouve ainsi une inégalité déjà démontrée par les méthodes de Cauchy (Ire Partie, p. 298) et par celles de Weierstrass (Ire Partie, p. 219).

Nous nous bornerons pour l'instant à ces remarques : plus loin, nous reprendrons par les procédés de Weierstrass l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables (¹).

(¹) M. Poincaré a étendu aux variables imaginaires la notion d'intégrale double, ce qui l'a conduit à une généralisation du théorème fondamental de Cauchy; il a défini les *résidus* d'intégrale double, etc. *Cf.* Poincaré, *A. M.*, t. IX. — Picard, *J. M.*, 1889; *Analyse*, t. II, p. 253. — Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.*

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES FONCTIONS AU POINT DE VUE DE WEIERSTRASS.

272. Le mathématicien dont les écrits exercèrent sur le développement intellectuel de Weierstrass une influence prépondérante est Abel. « Je ne puis me représenter autrement Weierstrass, disait un de ses premiers élèves à l'Université de Berlin, que les œuvres d'Abel en mains et montrant toujours Abel... *Lisez Abel,* tel était son premier comme son dernier conseil » ([1]).

De fait, c'est à Abel que Weierstrass a pris la rigueur de ses méthodes, quelques-unes de ses vues sur les séries entières ([2]), et surtout l'ambition de créer une théorie complète des fonctions abéliennes. Voici comment il s'exprimait sur ce sujet dans son discours de réception à l'Académie de Berlin (9 juillet 1857) ([3]) :

« Une branche encore relativement jeune de l'Analyse mathématique, la Théorie des fonctions elliptiques, avait exercé sur moi, depuis l'époque où je l'étudiais pour la première fois sous mon maître Gudermann, un puissant attrait, dont l'influence est restée prédominante sur le développement de ma formation mathématique. Cette théorie, créée par Euler, développée avec ardeur et succès par Legendre, mais dans une direction unique, venait depuis dix ans d'être bouleversée par l'introduction des fonctions doublement périodiques découvertes par Abel et Jacobi... Abel,

---

([1]) *Cf.* MITTAG-LEFFLER, *A. M.*, t. XXI, p. 81.

([2]) Le Mémoire d'Abel sur la série du binome (*Œuvres*, t. I, p. 219; 1826) renferme, on l'a reconnu plus tard, les fondements naturels de la Théorie des séries entières. Néanmoins, dans l'ordre historique, il faut remonter jusqu'à Lagrange qui avait eu la première intuition du rôle qu'elles devaient jouer (*cf.* Ire Partie, p. 47 et ci-dessous n° 273).

([3]) WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. I, p. 223.

habitué à se placer toujours au point de vue le plus élevé, avait trouvé un théorème qui s'étend à toutes les transcendantes provenant de l'intégration des différentielles algébriques, et jouait vis-à-vis d'elles le rôle du théorème d'Euler pour les fonctions elliptiques. Enlevé à la fleur de l'âge, il n'avait pu lui-même poursuivre sa grande découverte; mais Jacobi avait réussi à y rattacher une proposition non moins importante, en démontrant l'existence de fonctions périodiques de plusieurs arguments, dont les propriétés fondamentales reposent sur le théorème d'Abel : par là, il avait fait connaître le vrai sens et la nature propre de ce théorème.

» La représentation effective et l'étude détaillée des propriétés de ces grandeurs d'espèce toute nouvelle, dont l'Analyse n'avait encore aucun exemple, devenait un problème de première importance en Mathématiques : je résolus de diriger mes recherches de ce côté. »

Avant de l'aborder, il fallait que Weierstrass approfondît la Théorie générale des fonctions : voici le point de vue sous lequel il l'envisagea.

273. Autrefois Lagrange, voulant « ramener le Calcul différentiel à une origine purement algébrique » et éviter « le circuit métaphysique des infiniment petits et des limites » (¹), estimait « plus naturel et plus simple » de faire reposer la Théorie des fonctions sur celle des développements en séries de puissances (²).

(¹) LAGRANGE, *Œuvres*, t. X, p. 9.

(²) Après avoir montré les inconvénients qu'il peut y avoir à fonder le Calcul différentiel avec Leibnitz, les Bernoulli, L'Hôpital, etc. « sur la considération des quantités infiniment petites de différents ordres, et sur la supposition qu'on peut traiter comme égales les quantités qui ne diffèrent que par des quantités infiniment petites à leur égard » sans démontrer les principes sur lesquels cette méthode repose, après avoir rappelé les efforts tentés par Euler, d'Alembert, etc. pour « suppléer à ce défaut » (leur idée, dit-il, juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit reposer sur l'évidence et surtout pour être présentée aux commençants), après avoir dit un mot de la méthode des fluxions (Newton), Lagrange ajoute : « ... En 1772, ... j'avançai que la théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits et de limites; et je démontrai par cette théorie le théorème de Taylor, qui est le fondement de la méthode des séries. » (*Œuvres*, t. IX, p. 16 et 19.)

Mais, à la fin du XVIII[e] siècle, les notions de limite et de convergence étaient encore peu précises; on ignorait les propriétés des séries entières, on ne parlait pas de convergence uniforme : aussi cette idée ne pouvait-elle recevoir dès cette époque son plein développement.

Les travaux d'Abel, de Cauchy, de Dirichlet avaient préparé le terrain (¹), quand Weierstrass, toujours préoccupé de mettre dans une doctrine de l'unité, de la simplicité et de la rigueur (²), soucieux d'en faire un tout achevé, résolut d'édifier systématiquement la Théorie des fonctions analytiques en se plaçant au seul point de vue arithmétique. Pour y parvenir, il reprit l'idée de Lagrange et eut recours aux *séries de puissances,* dont il voulut se servir comme d'instrument presque unique dans l'exposé didactique de son œuvre (³).

De là, ses travaux sur les séries entières et les produits infinis

---

(¹) Le théorème de Cauchy (I[re] Partie, p. 289) donnait une base à cette méthode. *Voir* aussi la note (I[re] Partie, p. 299) relative à la priorité de Gauss.

Les Ouvrages de M. Méray, spécialement le *Nouveau précis* (1872) et les *Leçons nouvelles* (1894-1898), résultat de recherches bien antérieures, sont écrits systématiquement à ce point de vue. Ce géomètre a aidé pour une large part à créer cette méthode d'exposition.

(²) De là cette expression : l'*habitus* mathématique de Weierstrass, sa rigueur (*die Weierstrass'sche Strenge*) [*cf.* KLEIN, *Sur l'arithmétization des Mathématiques* (*N. A.*, 1897, p. 114)].

« Weierstrass renonce à se servir de l'intuition, ou du moins ne lui laisse que la part qu'il ne peut lui ôter. Les notions intuitives sont analysées et réduites en leurs éléments.... L'analyse est poussée jusqu'à ce que l'on arrive à l'élément ultime, le nombre entier....

» Tout dérive donc du nombre entier et participe par conséquent de la certitude de l'Arithmétique; le continu lui-même se ramène à cette origine, et toutes les égalités qui font l'objet de l'Analyse et où figurent des grandeurs continues ne sont plus que des symboles, remplaçant une multitude infinie d'inégalités entre nombres entiers. Les notions analytiques sont donc pour Weierstrass, comme pour Kronecker, des constructions faites avec les mêmes matériaux, les nombres entiers. Mais il y a une différence entre les deux conceptions; Kronecker est surtout préoccupé de mettre en évidence le sens philosophique des vérités mathématiques; le nombre entier étant le fond de tout, il veut qu'il reste partout apparent; pour lui les seules opérations licites sont l'addition et la multiplication; ce n'est que par une concession aux préjugés contemporains qu'il consent parfois à admettre la division. Tel n'est pas le point de vue de Weierstrass.... » POINCARÉ, *L'œuvre mathématique de Weierstrass* (*A. M.*, t. XXII, p. 16). Rappelons que Weierstrass a critiqué, même très vivement, l'exclusivisme de Kronecker relativement à l'idée de *nombre*.

(³) On méconnaîtrait néanmoins la conception de Weierstrass en supposant

(Chap. II et III), la définition de fonction analytique par un système monogène de séries de puissances (Chap. V) et les nombreux théorèmes que nous allons établir.

§ I. — Fonctions entières : représentation, propriétés.

Les fonctions analytiques les plus simples sont celles qui n'ont pas de singularité à distance finie, c'est-à-dire les *fonctions entières*. Elles peuvent être représentées par des séries de puissances dont le rayon de convergence dépasse tout nombre donné (Ire Partie, p. 289); réciproquement, de pareilles séries définissent des fonctions analytiques n'ayant pas de singularité à distance finie (Ire Partie, p. 304), et, par suite, des fonctions entières.

Aussi devons-nous reprendre, par les procédés de Weierstrass, l'étude des développements tayloriens convergents dans tout le plan : et d'abord, quelle est la nature de leur point à l'infini?

---

qu'il rejette tout moyen d'investigation, en dehors du développement de Taylor, quand il s'agit de trouver les propriétés des fonctions : nous avons déjà dit que, dans la Théorie des fonctions elliptiques, il prend comme point de départ le théorème d'addition algébrique (*voir* aussi n° 306, note).

Voici le jugement que Weierstrass, dans une Lettre à M. Schwarz (3 octobre 1875, *Œuvres*, t. II, p. 235) porte lui-même sur sa méthode : « Plus je réfléchis sur les principes de la Théorie des fonctions, et j'y pense sans cesse, plus s'affermit ma conviction qu'elle doit reposer sur le fondement des vérités algébriques, et que l'on ne suit pas la voie droite quand, inversement, pour établir les lois simples et fondamentales de l'Algèbre, il faut avoir recours à ce que pour abréger j'appellerai le *transcendant* (si séduisantes que puissent paraître au premier abord les considérations par lesquelles Riemann a établi tant d'importantes propriétés des fonctions algébriques). Que l'inventeur, aussi longtemps qu'il s'occupe de recherches, puisse prendre le chemin qu'il lui plaît, cela va de soi; je parle ici seulement d'une exposition systématique. »

De fait, un jugement comparatif entre les procédés de Cauchy et ceux de Weierstrass est malaisé : le but est différent. A ce propos, contentons-nous des remarques suivantes :

Il y a plus de largeur dans les définitions de Cauchy : mais existe-t-il *a priori* des fonctions satisfaisant aux conditions multiples qu'il leur impose, et n'y a-t-il pas un inconvénient à accumuler dès le début d'une théorie bien des notions délicates ?

La notion de série se présente assez naturellement; mais est-il bon de caractériser une fonction par une forme spéciale de représentation?

Les définitions de Cauchy rendent presque intuitifs bien des théorèmes; mais quelle évidente rigueur dans le procédé suivi par Weierstrass pour les établir!

Quant à la comparaison entre la notion d'*intégrale* définie et celle de *série*, on a fait remarquer que, reposant toutes deux sur l'idée de *limite*, elles puisent dans cette même origine le même caractère transcendant.

274. Théorème I. — *La fonction analytique uniforme définie par une série entière* $G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, *convergente dans tout le plan, a une singularité essentielle à l'infini.*

En effet, d'abord une pareille fonction n'est pas régulière à l'infini (p. 92) (¹).

De plus, l'infini n'est pas un pôle. Sinon on pourrait trouver un entier positif n tel que le produit de la fonction par x^{-n} fût régulier dans le domaine de l'infini. Or, ce produit peut être séparé en deux parties

$$a_0 x^{-n} + a_1 x^{-n+1} + \ldots + a_{n-1} x^{-1}, \quad a_n + a_{n+1} x + \ldots.$$

A l'extérieur d'un cercle de rayon déterminé suffisamment grand, la première devient inférieure à tout nombre donné et la seconde dépasse tout nombre donné. Donc, leur somme n'est pas holomorphe à l'infini.

Le point à l'infini est donc bien un point essentiel, puisqu'il n'est ni un point ordinaire, ni un pôle.

275. La réciproque (n° 277) repose sur cet important théorème déjà établi (Iʳᵉ Partie, p. 292 et 306) :

La fonction analytique définie par une série entière a au moins un point singulier sur la circonférence du cercle de convergence de cette série.

Donnons-en ici une démonstration directe et commençons par un lemme.

Soit

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (|a_n| = \alpha_n),$$

une série entière, qui converge au moins dans le domaine $|x| < R_1$. En chacun des points ξ de ce domaine, on peut déduire de l'élément initial, par prolongement, des séries $\mathfrak{P}(x \mid \xi)$ procédant suivant les puissances de $x - \xi$. *Si les rayons de convergence de ces séries ont pour limite inférieure un nombre* ρ, *le rayon de convergence* R *de la série* $\mathfrak{P}(x)$ *est au moins égal à* $R_1 + \rho$.

(¹) Il suffit d'avoir établi le lemme de Cauchy par la méthode de Weierstrass (Iʳᵉ Partie, p. 219) pour que le théorème de Cauchy-Liouville se trouve démontré au moyen des séries, indépendamment de toute considération d'intégrale.

Nous établirons ce lemme en montrant que, dans le domaine $|x| < R_1 + \rho$, le module de $a_n x^n$ ne dépasse pas un nombre fixe.

Par hypothèse, la série

$$\mathfrak{P}(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}^n(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

converge dans le domaine $|\xi| < R_1$, $|x-\xi| < \rho$. Entourons chaque point ξ d'une circonférence C_1 de rayon ρ_1 ($\rho_1 < \rho$), et appelons N la limite supérieure des modules de la série $\mathfrak{P}(x \mid \xi)$ sur les circonférences de tous les cercles C_1 décrits de tous les points ξ dont le module est un nombre r inférieur à R_1. N est fini, et l'on a (I[re] Partie, p. 219)

$$(1) \qquad \left| \frac{\mathfrak{P}^n(\xi)}{n!} \right| \leqq N \rho_1^{-n}.$$

On peut obtenir $\mathfrak{P}^n(\xi)$ en dérivant n fois la série entière donnée qui représente $\mathfrak{P}(\xi)$ (I[re] Partie, p. 139); l'inégalité (1) peut donc s'écrire

$$(2) \qquad \frac{1}{n!} \left| \sum_{\mu=n}^{\infty} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\, a_\mu \xi^{\mu-n} \right| \leqq N \rho_1^{-n}.$$

Appliquons le même lemme (I[re] Partie, p. 219) à la série entière $\mathfrak{P}^n(\xi)$ dont nous venons d'obtenir les coefficients en dérivant n fois $\mathfrak{P}(\xi)$; puis servons-nous du second membre de l'une des inégalités (1) ou (2) pour avoir une limite supérieure du module de $\mathfrak{P}^n(\xi)$ sur la circonférence décrite de l'origine avec r comme rayon. Il vient

$$\frac{1}{n!} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\, a_\mu \leqq N \rho_1^{-n} r^{n-\mu} \qquad (\mu \geqq n),$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{1}{n!} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\, a_\mu r^\mu \frac{\rho_1^n}{R_1^n} \leqq N \frac{r^n}{R_1^n}.$$

Or, on a

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\mu} \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} a_\mu r^\mu \frac{\rho_1^n}{R_1^n} = a_\mu r^\mu \left(1 + \frac{\rho_1}{R_1}\right)^\mu,$$

par suite, le premier membre de la relation (4) représente le

module du $(\mu+1)^{\text{ième}}$ terme de la série $\mathfrak{P}(x)$ sur la circonférence $|x| = r + \frac{r\rho_1}{R_1}$. D'après l'inégalité (3) il n'atteint pas

$$N\frac{1-\frac{r^{\mu+1}}{R_1^{\mu+1}}}{1-\frac{r}{R_1}}$$

et, *a fortiori,* le nombre fixe

$$N\frac{R_1}{R_1-r}.$$

Donc, *la série donnée* $\mathfrak{P}(x)$ *converge absolument dans le domaine* $|x| < r + \frac{r\rho_1}{R_1}$; *c'est dire que son rayon de convergence est au moins égal à* $R_1 + \rho$, *puisque* r *et* ρ_1 *s'approchent autant que l'on veut de* R_1 *et de* ρ (¹).

276. Ce lemme établi, le théorème est immédiat.

En effet, dans le domaine $\mathfrak{D}$ formé par le cercle de convergence C de l'élément $\mathfrak{P}(x)$ et sa circonférence, les rayons de convergence $\rho(\xi)$ des séries $\mathfrak{P}(x|\xi)$ ont une limite inférieure ρ qui est *nulle;* sinon le rayon de convergence de $\mathfrak{P}(x)$ surpasserait le rayon R de C.

Cette fonction $\rho(\xi)$ est continue dans $\mathfrak{D}$ (²), et, dès lors, elle atteint au moins en un point de $\mathfrak{D}$ sa limite inférieure (Iʳᵉ Partie, p. 40). Ce point ne saurait être intérieur au cercle C, puisqu'en tout point intérieur le rayon de convergence est positif. Il est donc situé sur sa circonférence (³).

(¹) Le rayon de convergence R ne peut dépasser $R_1 + \rho$: aussi, le lemme revient à dire que ce rayon de convergence s'obtient en augmentant R_1 de la limite inférieure des rayons de convergence des séries prolongements.

Ce lemme s'étend aisément aux fonctions de *plusieurs* variables (*cf.* BAKER, *Proceedings of the London M. S.*, 1901-1902, p. 296).

(²) Pour s'en assurer, il n'y a qu'à modifier légèrement un raisonnement déjà fait (Iʳᵉ Partie, p. 303).

(³) Comme le lemme ci-dessus, le théorème s'étend aux fonctions de plusieurs variables. Par exemple, une fonction analytique de deux variables, définie par une série entière, a au moins une singularité sur l'ensemble $|x| = R$, $|y| = \mathfrak{R}$, R et $\mathfrak{R}$ désignant des rayons de convergence associés.

277. THÉORÈME II. — *Les développements tayloriens des fonctions entières ont des rayons de convergence infinis.*

En effet, si le cercle de convergence C de l'élément initial d'une fonction entière avait un rayon fini, cette fonction aurait au moins un point singulier sur sa circonférence; l'existence de cette singularité à distance finie est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. — Une fonction entière peut être représentée par une série entière $G(x)$ convergente dans tout le plan (ou bien, si elle est rationnelle, par un polynome); dès lors, la transformation $(x, (x-a)^{-1})$ montre que toute fonction ayant une singularité unique (nous la supposerons essentielle) est représentable par une série $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$. C'est une *fonction quasi-entière.*

278. THÉORÈME III. (WEIERSTRASS.) — *Dans tout domaine borné, une fonction entière a un nombre fini de racines.*

En effet, si, dans un pareil domaine, elle en avait une infinité, ces racines auraient à distance finie un point limite a (Ire Partie, p. 21) dans le voisinage duquel la fonction serait régulière. En ce point, ou bien la fonction serait nulle, ce qui est impossible, puisque les racines d'une fonction holomorphe sont isolées; ou bien la fonction serait différente de zéro, ce qui est impossible, car une série de puissances est continue dans son domaine de convergence, et par suite la fonction entière est continue en a (*voir* aussi n° **291**).

§ II. — DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PRIMAIRES.

279. La fonction transcendante entière peut être envisagée comme la *somme* d'une suite illimitée de termes de la forme $a_n x^n$, et à ce titre elle généralise le polynome. Comme le polynome, est-elle aussi décomposable en un *produit* de facteurs? quelle est la nature et quel est le nombre de ces facteurs? leurs racines peuvent-elles être choisies arbitrairement et suffisent-elles à déterminer la fonction?

Quelques recherches antérieures à celles de Weierstrass avaient préparé la solution de ces problèmes.

Depuis longtemps, Euler avait fait connaître la décomposition du sinus en un produit de binomes du *second* degré au moyen de la formule

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\cdots.$$

Cauchy avait vu que, pour obtenir certaines transcendantes, il fallait multiplier le produit des binomes du premier degré du type $x - a_n$ par une exponentielle $e^{g(x)}$, $g(x)$ désignant une fonction entière ([1]). Même l'introduction de cette exponentielle ne suffit à donner l'expression générale des fonctions admettant les zéros $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ que dans le cas où la série $\sum |a_n|^{-1}$ converge.

L'étude du développement des fonctions $\mathfrak{I}$ et σ en produits infinis amena Weierstrass à s'occuper de cette question et fut ainsi l'occasion d'une de ses plus belles découvertes ([2]).

280. La formule trouvée par Gauss ([3]),

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x}\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-x\log\frac{n+1}{n}}\right],$$

le mit sur la voie de la solution. Dans ce développement, chaque

---

([1]) *Œuvres*, 2ᵉ série, t. IX, p. 210 (*Anciens exercices de Mathématiques*, 1829-1830).

([2]) Ces recherches, exposées en 1874 par Weierstrass dans son cours à l'Université de Berlin, ont été publiées dans un Mémoire fondamental : *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (*C. R. de l'Ac. de Berlin*, 1876; *Œuvres*, t. II, p. 77; traduit par M. PICARD, *A. E. N.*, 1879).

Quinze ans auparavant, Betti, dans ses Leçons à l'Université de Pise (1859-1860), avait traité un problème analogue à celui résolu par Weierstrass, mais sans apercevoir toutes les conséquences de sa découverte; il en fit l'application au développement des fonctions eulériennes, trigonométriques et elliptiques, puis, laissant son Mémoire inachevé, il n'y pensa plus (*Annali di Matematica*, 1860; *La teorice delle funzioni ellitiche. Introduzione*, nº 6, p. 81.)

On peut *voir* aussi SCHERING, *Göttinger Abhandlungen*, t. XXVII, 1881, p. 3.

([3]) *Definimus itaque functionem* $\Pi(z)\ldots$, *si mavis, per limitem producti infiniti*

$$\frac{1}{z+1}\,\frac{2^{z+1}}{1^z(2+z)}\,\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)}\,\frac{4^{z+1}}{3^z(4+z)}\cdots$$

(GAUSS, *Œuvres*, t. III, p. 146).

facteur, au lieu d'être linéaire, est une fonction uniforme n'ayant qu'un zéro (le point $-n$) et un point singulier (le point ∞) : l'introduction d'exponentielles dans chaque élément du produit fait que ce produit converge, alors que le produit des facteurs $\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est divergé quel que fût l'ordre de ses termes.

Dans le cas général, la solution était analogue : en adjoignant à chaque binome $(x-a_n)$ une exponentielle, c'est-à-dire en prenant comme facteurs des *transcendantes entières ayant chacune un seul zéro,* on obtenait des produits infinis convergents. Ces fonctions entières à un seul zéro remplacent les facteurs linéaires qui interviennent dans le cas du polynome; elles sont appelées *facteurs primaires* [1].

Weierstrass a ainsi résolu les questions suivantes :

Étant donné un ensemble isolé E *d'éléments* $a_1, \ldots, a_n, \ldots,$ *sans point limite à distance finie, rangé de telle sorte que l'on ait* [2]

$$|a_1| \overline{\gtrless} |a_2| \overline{\gtrless} \ldots \overline{\gtrless} |a_n| \overline{\gtrless} \ldots \qquad \left(a_1 \gtrless 0;\ \lim_{n=\infty} a_n = \infty\right),$$

existe-t-il des fonctions entières ayant pour racines et pour seules racines les points de cet ensemble [3]; *peut-on les repré-*

---

[1] Weierstrass appelle *facteur primaire* toute fonction uniforme qui a une seule singularité (polaire ou essentielle) et au plus un zéro (*Œuvres,* t. II, p. 91).

[2] Si plusieurs éléments ont le même module, on les place dans un ordre arbitraire.

Si un élément est répété p fois, on impose à la racine correspondante d'avoir comme ordre p : pour y parvenir, il suffit d'élever à la puissance p le facteur primaire relatif à cette racine.

Si *zéro* devait être racine et racine d'ordre q, on ferait précéder du facteur x^q le produit que nous allons former; ou bien, ce qui revient au même, on formerait une fonction du type $x^{-q}\,G(x)$ répondant à l'énoncé.

[3] Les zéros de *toute* fonction entière doivent pouvoir satisfaire aux conditions imposées à l'ensemble E (Ire Partie, p. 140 et n° 290); il va résulter du théorème de Weierstrass que *réciproquement à tout ensemble d'un pareil type correspond une fonction entière.*

En combinant le théorème de Weierstrass et celui de M. Mittag-Leffler (n° 293), on obtient immédiatement l'expression des diverses fonctions entières qui prennent aux points $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ des *valeurs données* $b_1, \ldots, b_n, \ldots$. On en déduit également l'expression d'une fonction entière prenant en ces points, ainsi que sa dérivée, des valeurs données $b_1, \ldots, b_n, \ldots, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ (*cf.* GUICHARD, *A. E. N.,* 1884, p. 427).

senter par un produit de facteurs primaires; quelle en est l'expression la plus générale?

281. Formons d'abord une fonction entière particulière ayant pour racines et pour seules racines les points de E.

Lorsque la série $\sum \frac{1}{|a_n|}$ est convergente, la série $\sum \frac{x}{a_n}$ converge absolument et uniformément dans tout domaine borné; par suite (Ire Partie, p. 144) il en est de même du produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right).$$

La solution du problème énoncé est donc immédiate dans ce cas particulier (Ire Partie, p. 146).

Dans le cas général, posons

$$\mathrm{P}_n\left(\frac{x}{a_n}\right)=\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{n_n^2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}},$$

et considérons le produit

$$(\mathrm{W}) \qquad \mathrm{G}(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\mathrm{P}_n\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right];$$

il converge absolument et uniformément dans tout domaine fini.

En effet, prenons les points x intérieurs à un cercle de rayon déterminé r, r étant aussi grand que l'on veut, ayant l'origine comme centre et laissons de côté les facteurs du produit (W), en nombre *limité* (soit μ ce nombre), pour lesquels $|a_n| < r$. Pour étudier les autres, remarquons que l'on a

$$\log\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\mathrm{P}_n\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right]$$
$$=\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)+\mathrm{P}_n\left(\frac{x}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n-\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+1}-\ldots.$$

Le facteur de rang n dans le produit (W) est donc

$$e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n-\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+1}\cdots}.$$

Ce facteur est une fonction entière, que l'on peut écrire (Ire Partie,

p. 169 et 219)

$$1+\alpha_0\left(\frac{x}{a_n}\right)^n+\alpha_1\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+1}+\ldots,$$

les coefficients α_0, α_1, ... du développement *étant tous en valeur absolue inférieurs à un* ([1]). Dès lors, pour prouver la convergence absolue et uniforme de (W), il suffit (Ire Partie, p. 144 et 148) d'établir la convergence absolue de l'une des séries

$$\sum_{n=\mu}^{\infty}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n+\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+1}+\ldots\right|,\quad \sum_{n=\mu}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n\frac{|a_n|}{|a_n|-r},\quad \sum_{n=\mu}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n,$$

et de montrer que cette dernière série, qui est numérique, converge. Il en est bien ainsi, puisque la racine $p^{\text{ième}}$ de son terme de rang p tend vers zéro ([2]).

([1]) En effet, considérons ce facteur sous la forme qu'il a dans le produit (W) et, pour le simplifier, remplaçons $\frac{x}{a_n}$ par x. On voit d'abord que, dans le développement de la fonction entière

$$e^{\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu}}=1+\left(\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu}\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu}\right)^2+\ldots=1+\beta_1x+\beta_2x^2+\ldots$$

en série entière, les coefficients β sont inférieurs à 1; car ces coefficients sont positifs, ne peuvent qu'augmenter avec ν, et tendent vers 1 pour ν infini, puisque alors on a

$$e^{\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu}+\ldots}=e^{\log\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots.$$

Revenons au facteur de rang n; il peut s'écrire

$$(1-x)e^{\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n-1}}=(1-x)(1+\beta_1x+\ldots)=1+\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n+1}+\ldots.$$

Puisque l'identification donne

$$\alpha_q=\beta_{n+q}-\beta_{n+q-1},$$

les inégalités $\beta_p<1$ entraînent les inégalités $|\alpha_q|<1$, comme il fallait l'établir.

([2]) D'après ce raisonnement, il suffit de prendre les polynomes P_n chacun d'un degré p_n-1 tel que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n}$$

converge quel que soit r (en général p_n sera une fonction croissante de n; dans certains cas, il pourra être constant). La détermination d'une suite d'entiers p_n

En résumé, le produit obtenu converge absolument dans tout le plan et uniformément dans tout domaine borné. En vertu de cette convergence uniforme, *il représente une fonction entière*, puisque ses facteurs sont des fonctions entières (Ire Partie, p. 219) [1]. Il s'annule *en chaque point* de l'ensemble E et *seulement* en ces points (Ire Partie, p. 146).

Chaque facteur est bien un *facteur primaire*, puisque c'est une fonction analytique uniforme ayant un seul zéro et un seul point singulier (point qui est essentiel et rejeté à l'infini) [2].

---

rendant convergente la série ci-dessus est possible, puisque $\lim |a_n| = \infty$. Ainsi, à la valeur particulière $p_n = n$ dont nous nous sommes servi pour fixer le degré des polynomes P_n, on peut substituer souvent *une valeur plus petite.*

Il en résulte que les fonctions exponentielles qui entrent dans les facteurs primaires ne sont pas déterminées : la décomposition en facteurs primaires est possible d'une infinité de manières (WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 101).

Nous insisterons tout à l'heure sur le cas où la série $\sum |a_n|^{-\omega-1}$ converge, ω désignant un entier *fixe;* il suffit alors de prendre $p_n = \omega + 1$.

Dans le cas général, il suffit de prendre pour p_n la partie entière de $\log n$, ou même de $2\log n : \log|a_n|$ (BOREL, *A. M.*, t. XX, p. 360).

(1) La dérivée logarithmique de ce produit $G(x)$ est une série $S(x)$ absolument et uniformément convergente; il en est de même des séries en nombre infini obtenues en dérivant terme par terme $S(x)$ et ses dérivées (il faut exclure de la convergence absolue les points racines des facteurs primaires, et de la convergence uniforme les voisinages de ces points).

En effet, on a

$$S(x) = \frac{G'(x)}{G(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x - a_n} + P'_n\left(\frac{x}{a_n}\right)\right]. \tag{1}$$

Raisonnons comme ci-dessus. Soit $|x| = r$; laissons de côté dans cette série les μ termes pour lesquels $|a_n| < r$, et remplaçons dans chacun des autres $(x - a_n)^{-1}$ par son développement suivant les puissances croissantes de x. Vu les hypothèses, le théorème de Weierstrass (Ire Partie, p. 219) et même celui de Cauchy (Ire Partie, p. 218) est applicable; par suite la somme considérée converge absolument et uniformément dans le cercle $|x| = r$. Si l'on ajoute à cette somme les μ termes laissés de côté, la somme totale $S(x)$ converge absolument et uniformément dans le domaine défini ci-dessus, en tenant compte des restrictions indiquées.

On peut appliquer le même raisonnement aux séries obtenues en dérivant $S(x)$ terme par terme un nombre quelconque de fois : il n'y a qu'à faire intervenir la convergence du développement binomial de $(1 - q)^{-n}$ pour $q < 1$.

(2) Un zéro d'une fonction entière est un pôle de sa dérivée logarithmique; cette dérivée n'a pas d'autres singularités; c'est donc une fonction méromorphe. Par suite, le théorème de M. Mittag-Leffler (nos 293 et 295) aurait permis d'écrire

282. Pour déduire de cette première fonction entière $G(x)$ toutes celles qui répondent à la question, on remarque que *toute fonction entière n'ayant pas de zéro est de la forme* $e^{g(x)}$, $g(x)$ désignant une fonction entière arbitraire.

En effet, d'abord une pareille fonction est régulière et différente de zéro dans tout domaine borné.

Réciproquement, toute fonction analytique uniforme $h(x)$ sans discontinuité et sans racine à distance finie a sa dérivée logarithmique développable en une série entière toujours convergente (nos **177** et **289**); ainsi on a, quel que soit x,

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots.$$

Il suffit donc d'appeler $g(x)$ la fonction entière (Ire Partie, p. 138)

$$b_0 + b_1 x + \frac{b_2}{2} x^2 + \ldots \qquad [e^{b_0} = h(0)],$$

pour pouvoir représenter par $e^{g(x)}$ la fonction $h(x)$ ([1]).

Ce lemme établi, appelons $G_1(x)$ une fonction entière quelconque ayant les mêmes zéros que $G(x)$. Le quotient de ces deux fonctions est une fonction entière ([2]) sans racine à distance finie; on a donc

$$G_1(x) = e^{g(x)} G(x).$$

Réciproquement, toute fonction du type $e^{g(x)} G(x)$ est une fonc-

---

de suite la formule (1) de la note ci-dessus : on en déduit par intégration la formule (W). De là une seconde méthode pour établir le théorème de Weierstrass, *qui devient ainsi un corollaire immédiat du théorème de M. Mittag-Leffler.*

Inversement, une fonction entière mise sous la forme (W) a pour dérivée logarithmique une fonction méromorphe mise sous *forme canonique* (n° 293).

([1]) WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 97.

Pour obtenir ce lemme par les procédés de Cauchy, on remarque que le logarithme d'une fonction entière sans racines n'est infini en aucun point à distance finie; par suite (Ire Partie, p. 178) il est régulier en tout point du plan : c'est une fonction entière $g(x)$. Donc la fonction $h(x)$ elle-même peut être représentée par $e^{g(x)}$.

([2]) Comme ci-dessus, le théorème de la division des séries entières (n° 289) montre que ce quotient est régulier en tout point du plan, que ce point soit ou non une racine pour les deux fonctions G et G_1.

tion entière ayant les mêmes racines que $G(x)$: nous avons donc obtenu l'expression de *toutes* les fonctions entières ayant des zéros donnés ([1]).

283. Reprenons la formule (W).

Supposons que la série $\sum |a_n|^{-1}$ devienne convergente par l'élévation de tous ses termes à une *même* puissance entière $\omega + 1$. En ce cas, aux polynomes P_n dont le degré $n - 1$ varie avec le facteur primaire correspondant, on peut substituer des polynomes *tous de même degré* ω, définis par les relations

$$P_{n\omega}\left(\frac{x}{a_n}\right) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n^2} + \ldots + \frac{1}{\omega}\frac{x^\omega}{a_n^\omega} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

il n'y a rien à modifier au raisonnement développé plus haut, puisque alors la série $\sum \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{\omega+1}$ converge.

Ce cas particulier, d'une grande importance, a conduit Laguerre à classifier les fonctions entières correspondantes en *genres*, d'après la valeur de ω ([2]). Supposons ω choisi *le plus petit possible*, et dans la relation

$$G(x) = e^{g(x)} \prod_{n=1} \left[\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{P_{n\omega}\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right],$$

prenons pour $g(x)$ un polynome de degré γ. *Le plus grand des deux entiers ω et γ définit le genre de la fonction* $G(x)$.

Une fonction est dite de *genre infini* lorsqu'il n'existe pas

---

([1]) Ainsi, de même que le polynome n'est déterminé par ses racines qu'à un facteur constant près, de même une fonction transcendante entière n'est déterminée par ses zéros qu'à un facteur exponentiel près. Ce facteur exponentiel renferme, il est vrai, une transcendante entière arbitraire, c'est-à-dire un élément de même nature que la fonction à représenter; néanmoins, en fait, cette transcendante est en général plus simple que la fonction dont on cherche l'expression. Son évaluation numérique, si embarrassante dans les applications, est parfois facilitée par une proposition de M. Hadamard (*J. M.*, 1893, p. 188). *Cf.* aussi Borel, *A. M.*, t. XX; *Fonctions entières*, p. 82.

([2]) *C. R.*, 1882, 1er semestre, p. 160, 635; 2e semestre, p. 828. *Œuvres*, t. I, p. 167.

d'entier fixe ω rendant convergente la série dont nous avons parlé, ou bien quand la fonction $g(x)$ est transcendante ([1]).

Les fonctions entières de genre zéro, c'est-à-dire celles dont les facteurs primaires ne renferment pas d'exponentielle (en supposant aussi que g a une valeur constante), se rapprochent des polynomes; à certains points de vue, les propriétés des fonctions entières diffèrent d'autant plus de celles des polynomes que leur genre est plus élevé ([2]).

Cette définition du genre d'une fonction peut être rattachée à celle de l'*exposant de convergence d'une suite infinie de nombres positifs croissants*. Soit

$$|a_1|, \quad |a_2|, \quad \ldots, \quad |a_n|, \quad \ldots$$

une pareille suite. Il peut arriver que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^\rho}$ diverge pour une valeur positive de ρ (et dès lors pour chaque nombre de l'ensemble E formé par les nombres positifs moindres), qu'elle converge pour une valeur positive de ρ (et dès lors pour chaque nombre de l'ensemble $\mathcal{E}$ formé par les nombres supérieurs). La limite commune R de ces deux ensembles E et $\mathcal{E}$ est appelée *exposant de convergence* de la suite ([3]).

([1]) Exemple : les fonctions pour lesquelles $|a_n| = \log n$ sont de genre infini. M. Boutroux a abordé une classification des fonctions entières d'ordre infini, basée sur le mode de croissance des racines de ces fonctions, et a donné quelques propriétés des fonctions dont l'ordre est infini sans être transfini (*C. R.*, 1902, 1er semestre, p. 519). *Voir* aussi MAILLET, *C. R.*, 1903, 1er semestre, p. 348.

Antérieurement, M. Boutroux, en réponse à une question posée par M. Poincaré (*B. S. M.*, 1883), avait montré que *la somme de deux fonctions chacune de genre p peut être de degré p — 1* (*C. R.*, 1901, 1er semestre, p. 251 et 1902, 1er semestre, p. 82).

([2]) Par exemple, le théorème des lacunes, corollaire de celui de Descartes, s'applique aux fonctions entières de genre 0 ou 1; certaines conséquences du théorème de Rolle subsistent pour les fonctions de genre fini. *Cf.* BOREL, *Fonctions entières*, p. 29. — CESÀRO, *C. R.*, 1884, 2e semestre, p. 26.

([3]) Ce nombre R *existe* (Ire Partie, p. 26). Il résulte de sa définition que la série $\sum |a_n|^{-\rho}$ diverge pour $\rho = R - \varepsilon$, et qu'elle converge $\rho = R + \varepsilon$, quel que soit le nombre positif ε; pour $\rho = R$, il y a doute. Ce nombre R est nul (ou infini) quand la série converge (ou diverge) quel que soit ρ.

L'*exposant de convergence* joue dans la théorie des fonctions entières un rôle important, comme le *rayon de convergence* dans celle des séries entières. En

D'après cette définition, le genre ω d'une fonction entière est égal à la partie entière de l'exposant de convergence R de l'ensemble formé par ***la suite des modules de ses zéros,*** si R n'est pas entier; quand R est entier, ω est égal à R — 1 ou à R, suivant que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^R}$ converge ou diverge (on suppose $\gamma \leqq \omega$).

M. Borel a proposé de compléter la notion de genre par celle d'*ordre*. Il entend par *ordre réel* d'une fonction entière $G(x)$ de genre fini l'*exposant de convergence* R de la suite des modules de ses zéros, et par *ordre apparent* R' le plus petit nombre tel que l'on ait, pour les valeurs de r supérieures à une limite fixe, quelque-petit que soit le nombre positif ε,

$$N(r) < e^{r^{R'+\varepsilon}},$$

en désignant par $N(r)$ le module maximum de la fonction $G(x)$ sur la circonférence $|x| = r$ (1).

---

particulier, dans le cas où l'*ordre d'infinitude* (*voir* note suivante) de la suite des éléments $|a_n|$ considérés comme des fonctions de n, a_n désignant la racine de rang n, ***est déterminé,*** cet ordre est égal à l'inverse de l'exposant de convergence de la suite des éléments $|a_n|$; par suite, la connaissance de l'exposant de convergence de la suite $|a_n|$ renseigne d'une manière précise sur la rapidité de la croissance de $|a_n|$. *Cf.* Borel, ***Fonctions entières,*** p. 23 et 107.

(1) ***Pour étudier la croissance d'une fonction*** positive $\varphi(r)$ qui croît indéfiniment avec la variable r, on la compare à une puissance positive de r. Si le quotient $\varphi(r) : r^\alpha$ tend vers une limite finie et différente de zéro pour r infini, on dit que α est le ***degré d'infinitude*** de la fonction $\varphi(r)$.

Pour que ce degré existe, il faut, mais il ne suffit pas, que le rapport

$$\log \varphi(r) : \log r$$

tende vers une limite. Néanmoins, toutes les fois que ce rapport tend vers une limite α, on convient de considérer cette limite, alors même que le degré d'infinitude ne serait pas déterminé, et de dire que $\varphi(r)$ est de degré (α) (que l'on énoncera dans ce cas en disant α parenthèses).

D'après cette définition, la fonction e^x a un degré infini.

On peut dire encore que l'*ordre d'infinitude* de $\varphi(r)$ est ***déterminé,*** quand il existe un nombre α tel que, si petit que soit un nombre ε donné à l'avance, l'inégalité $r > N$ entraîne les inégalités $r^{\alpha-\varepsilon} < \varphi(r) < r^{\alpha+\varepsilon}$, N désignant un nombre fixe. L'ordre d'infinitude de $\varphi(r)$ est alors le même que celui de r^α.

Une fonction $\varphi(r)$ ***est dite à croissance régulière*** lorsque sa croissance peut être comparée à celle de certaines fonctions simples. D'une manière plus précise, elle est dite à croissance régulière lorsque l'ordre d'infinitude de $\log \varphi(r)$ est

Dans d'importants travaux on a tiré parti de ces notions. M. Poincaré a fait connaître une relation entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière pour les grandes valeurs de la variable, et, d'une part, le genre de cette fonction (supposé fini), d'autre part, l'ordre de grandeur de ses coefficients ([1]). MM. Hadamard et Schou ont complété ces théorèmes en donnant une relation entre une limite supérieure de la croissance d'une fonction entière

---

déterminé, ou encore lorsque $\frac{\log \log \varphi(r)}{\log r}$ a une limite pour r infini. *Cf.* Borel, *Fonctions entières*, p. 22 et 107; *Séries à termes positifs*, p. 32; *Fonctions méromorphes*, p. 49.

Soit $G(x)$ une fonction entière d'ordre fini et différent de zéro : elle est dite à croissance régulière lorsque $N(r)$ est à croissance régulière, $N(r)$ désignant son module maximum sur la circonférence $|x| = r$, par suite, lorsque $\frac{\log \log N(r)}{\log r}$ a une limite [ou encore lorsque l'ordre d'infinitude de $|a_n|$ est déterminé (Borel, *Fonctions entières*, p. 108)]. On peut dire que cette limite définit l'*ordre apparent* de la fonction.

Quand l'ordre apparent n'est pas entier, il se confond avec l'ordre réel : c'est l'ordre de la fonction. L'ordre d'une fonction se déduit donc soit de la considération de la suite de ses zéros, soit de celle des valeurs de $N(r)$. *Cf.* Borel, *Fonctions entières*, p. 74.

Signalons enfin un Mémoire de M. Maillet où il établit un critère pour reconnaître si une fonction entière donnée par son développement de Taylor est à croissance régulière, et un critère pour reconnaître si elle est à croissance irrégulière (*A. T.*, 1902, p. 446).

([1]) Soit $G(x) = \sum c_n x^n$ une fonction entière de genre ω, et $N(r)$ son module maximum pour $|x| = r$. On dit que l'*ordre de grandeur* de la fonction positive *croissante* $N(r)$ (Ire Partie, p. 297) est inférieur à celui d'une fonction $\Phi(r)$ si l'on a, à partir d'une certaine valeur de r,

$$N(r) < \Phi(r).$$

Les inégalités dites *de M. Poincaré* (*B. S. M.*, 1883, p. 136) résultent des relations

$$N(r) < e^{\alpha r^{\omega+1}}, \quad \lim_{n=\infty} \left(c_n \sqrt[\omega+1]{n!}\right) = 0 :$$

la première a lieu, quel que soit le nombre positif α, pourvu que r soit assez grand; la seconde permet d'écrire à partir d'une certaine valeur de n

$$|c_n| < \frac{1}{\sqrt[\omega+1]{n!}}.$$

M. Pringsheim a rendu plus élémentaires la démonstration du théorème de M. Poincaré, et celle du théorème de M. Hadamard énoncé dans la note suivante (*Sitz. d. A. zu München*, 1902, p. 163).

et une limite supérieure du nombre de ses zéros intérieurs à un cercle décrit de l'origine ([1]). M. Borel a cherché si le nombre des zéros atteint effectivement cette limite supérieure ([2]), etc.

Indiquons seulement, pour une fonction entière quelconque $G(x)$, une formule simple relative au nombre $n = \theta(r)$ de ses zéros dont le module est inférieur à un nombre donné r, formule valable dans le cas où $\theta(r)$ croît rapidement avec r ([3]).

([1]) D'après les définitions précédentes, on est conduit à dire qu'*une fonction $v(r)$ est une* LIMITE SUPÉRIEURE DE LA CROISSANCE *de la fonction entière $G(x)$ quand on a*

$$N(r) \overline{\overline{<}} e^{v(r)},$$

QUEL QUE SOIT r. Soit $G(x)$ une fonction entière de genre fini, dont on connaît une limite supérieure $v(r)$ de la croissance; nous supposerons $G(0) = 1$. MM. Hadamard (*J. M.*, 1893) et Schou (*C. R.*, 1897, 2e semestre, p. 763) ont déduit de cette limite supérieure de la croissance une *limite supérieure du nombre n des racines* de $G(x)$, de module inférieur au quotient de r par un nombre arbitraire s plus grand que 2; elle résulte de l'inégalité

$$n \log(s-1) < v(r).$$

En particularisant la fonction $v(r)$, on en conclut que *l'ordre réel d'une fonction entière est au plus égal à son ordre apparent.*

M. Hadamard montre ensuite que l'on a, sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants,

$$|G(x)| > e^{-r^{R+\varepsilon}},$$

R désignant l'ordre de la fonction, et ε un nombre positif arbitraire.

Dans un second Mémoire (*B. S. M.*, 1896, p. 186), M. Hadamard a mis, sous une forme plus simple et plus exacte, les relations qu'il avait trouvées entre l'ordre de grandeur des coefficients du développement de $G(x)$ et l'ordre de grandeur de $G(x)$ pour des valeurs infinies de la variable.

M. Lindelöf (*Acta S. S. Fennicæ*, t. XXXI, n° 1, 1902) a précisé les *relations entre la croissance des coefficients et la croissance de la fonction.* M. Maillet (*J. M.*, 1902) a obtenu des propriétés nouvelles des racines des fonctions entières de genre fini, et en a fait l'extension aux fonctions quasi-entières.

Cf. aussi : Le Roy, *B. D.*, 1900, p. 245. — Borel, *Fonctions entières*, p. 62; *Séries à termes positifs*, p. 58.

([2]) Borel, *A. M.*, t. XX, p. 357; *A. E. N.*, 1899, p. 44. — *Cf.* aussi Lindelöf, *C. R.*, 1902, 2e semestre, p. 316. — Petrovich, *B. S. M.*, 1901, p. 303. On y trouvera par exemple ce théorème :

Une série entière $f(x)$ ne peut avoir, dans son cercle de convergence, de racine de module inférieur à $|f(0)|\,M^{-1}$, M *désignant le maximum du module du rapport de la fonction majorante de $f(x)$ à la variable x* [*on suppose* $f(0) \gtrless 0$].

([3]) Elle a été obtenue par M. Borel (*C. R.*, 1902, 1er semestre, p. 1343). La démonstration que nous allons reproduire est due à M. Levi-Civita (*B. D.*, 1902, p. 333).

Supposons $G(o) = 1$, et désignons par r_n le module de la racine a_n de rang n. D'après cette notation, $\theta(r)$ a la valeur p pour $r_p < r \leqq r_{p+1}$; par suite il vient

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(r)}{r} dr = \sum_{p=1}^{n=1} \log \frac{r_{p+1}}{r_p} + n \log \frac{r}{r_n} = \log \frac{r^n}{r_1 \ldots r_n}.$$

En vertu du théorème de M. Jensen (p. 127), le dernier logarithme ne peut dépasser $\log N(r)$; on a donc

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(r)}{r} dr \leqq \log N(r).$$

Décomposons cette intégrale en deux autres : pour cela, appelons ρ au lieu de r la variable d'intégration ; puis servons-nous de l'identité $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r-\rho}{\rho}\right)$ et posons

$$\vartheta(r) = \int_{r_1}^{r} \theta(\rho)\, d\rho.$$

L'inégalité ci-dessus devient

$$\frac{1}{r}\vartheta(r) + \frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(\rho)}{\rho}(r-\rho)\, d\rho \leqq \log N(r).$$

Au premier membre, mettons en facteur $\frac{1}{r}\vartheta(r)$; la règle de L'Hospital donne

$$\lim_{r=\infty} \frac{\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(\rho)}{\rho}(r-\rho)\, d\rho}{\vartheta(r)} = \lim_{r=\infty} \frac{\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(\rho)}{\rho} d\rho}{\theta(r)} ;$$

par suite, il suffit que $\theta(r)$ croisse plus vite que $\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(\rho)}{\rho} d\rho$ pour que l'on ait l'inégalité asymptotique

$$\frac{\vartheta(r)}{r} < \log N(r).$$

Elle établit une relation simple entre l'ordre de grandeur de la fonction et la densité de ses zéros.

284. Montrons en terminant comment la formule de Weierstrass, relative aux fonctions entières, conduit à représenter sous

forme de produit infini, où l'ensemble E des zéros est encore mis en évidence, des fonctions analytiques uniformes non entières.

Supposons d'abord que l'ensemble E (ensemble isolé) ait un seul point limite, et qu'il soit à distance finie : soit a' ce point limite. Rangeons les éléments $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de E dans un ordre tel que $|a_n - a'|$ ne croisse jamais avec n. Il suffit de reprendre le raisonnement de Weierstrass, ou encore de transformer le plan par une substitution linéaire ramenant le point a' à l'infini, pour conclure que le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{a_n - a'}{x - a'}\, e^{P_n\left(\frac{a_n - a'}{x - a'}\right)}\right]$$

représente une fonction uniforme, ayant comme seuls zéros les points de E et comme unique singularité le point a'.

Telle est donc l'expression, sous forme de produit infini, d'une fonction quasi-entière à un seul point singulier essentiel.

Généralisons cette formule. Soit E un ensemble isolé tel que son dérivé E' ait tous ses points sur une circonférence C décrite de l'origine comme centre et soit partout dense sur C ([1]). Une méthode toute semblable à celle de Weierstrass conduit à représenter les fonctions analytiques uniformes régulières à l'intérieur (ou à l'extérieur) de C et nulles aux points de E sous la forme

$$(2) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x - a_n}{x - \alpha_n}\, e^{P_n(x)}\right) \qquad \left[P_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu}\left(\frac{a_n - \alpha_n}{x - \alpha_n}\right)^{\nu}\right].$$

Les points $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont ceux de E rangés dans un ordre convenable; les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des points de C choisis de façon que $\lim\limits_{n=\infty}(a_n - \alpha_n) = 0$; ce choix peut être fait d'une infinité de manières, ce qui permet de donner diverses expressions de la fonction ([2]).

M. Picard a aussi montré que l'on peut former une fonction

([1]) Un ensemble isolé est dénombrable (*A. M.*, t. II, p. 373), et, par suite, on en peut ranger linéairement les éléments. La réciproque n'est pas vraie : par exemple, l'ensemble formé par les nombres rationnels est dénombrable (Ire Partie, p. 15); il n'est pas isolé.

([2]) Picard, *C. R.*, 1er semestre, 1881, p. 690 (*Analyse*, t. II, p. 145). M. Picard

uniforme, continue dans tout le plan, sauf sur une coupure rectiligne, et admettant comme racines les points d'un ensemble isolé sans point limite en dehors de la coupure ([1]).

Enfin, un important théorème de M. Mittag-Leffler (nº **296**, note), généralise tous ces résultats ([2]).

§ III. — Exemples.

Les fonctions dont nous allons parler ont déjà été étudiées directement. Mais ici, pour leur définition, on se place à un point de vue nouveau, et l'on peut affirmer, sans démonstration directe, qu'elles jouissent des propriétés des produits absolument et uniformément convergents rappelées à la fin du nº **281**.

285. Problème I. — *Trouver l'expression générale des fonctions entières qui ont pour racines la suite des nombres entiers positifs et négatifs* ($\pm 1, \pm 2, \ldots$).

La série $\sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu^2}$ étant convergente, les fonctions les plus simples du type cherché sont de genre *un*. L'une d'elles a pour expression

$$(1)\qquad \prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\left(1-\frac{x}{\mu}\right)e^{\frac{x}{\mu}}\right] \qquad (\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

les autres s'en déduisent en multipliant cette fonction particulière par $e^{g(x)}$, $g(x)$ désignant une fonction entière arbitraire.

La convergence absolue de ce produit permet le groupement deux à deux de ses facteurs (Iʳᵉ Partie, p. 146); on peut donc

---

donne comme exemple d'ensemble E celui pour lequel on a

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)e^{\frac{2ki\pi}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

L'expression analytique (2) définit une fonction qui existe à l'intérieur de C, et une fonction qui existe à l'extérieur de C : il n'y a pas lieu de chercher si c'est la *même* fonction analytique, puisque C est en général une coupure fermée.

([1]) *C. R.*, 1882, 1ᵉʳ semestre, p. 1406.

([2]) *A. M.*, t. IV, p. 32; 1884.

regarder comme l'expression générale des fonctions cherchées le produit

$$e^{g(x)} \prod_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\mu^2}\right). \tag{2}$$

Parmi elles figure la transcendante $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$, puisque ses racines et ses seules racines correspondent aux valeurs ± 1, ± 2, ... : pour obtenir cette transcendante, il faut donner à $g(x)$ la valeur zéro ([1]).

286. Problème II. — *Former l'expression des fonctions entières qui ont pour zéros la suite des nombres entiers négatifs.*

Les fonctions les plus simples répondant à l'énoncé sont encore de genre *un*. Désignons l'une d'elles par $x^{-1}\varphi(x)$; on a

$$\varphi(x) = x \prod_{\mu=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{\mu}\right) e^{-\frac{x}{\mu}}\right] \quad ([2]). \tag{3}$$

Comme application, cherchons à décomposer en facteurs primaires l'inverse de la fonction eulérienne de deuxième espèce.

1° Représentons par C la constante d'Euler

$$C = \lim_{\mu=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\mu - 1} - \log \mu\right) = 0,5772156664\ldots,$$

([1]) On peut le démontrer en partant de la relation, vraie pour toute valeur finie de n,

$$\frac{\sin \pi x}{n \sin \frac{\pi x}{n}} = \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{n}}{\sin^2 \frac{\mu\pi}{n}}\right):$$

pour $n = \infty$, elle donne

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\mu^2}\right).$$

Cf. aussi Picard, *Analyse,* t. II, p. 151 et 167. — Borel, *Fonctions entières,* p. 82.

([2]) D'après ce qui précède, nous savons que ce produit converge absolument et uniformément : on peut aussi l'établir *directement*. *Cf.* Tannery, *Introduction à la Théorie des fonctions,* p. 211.

et par $\varphi_\mu(x)$ le produit des $\mu+1$ premiers facteurs de $\varphi(x)$

$$\varphi_\mu(x) = \frac{x(x+1)\ldots(x+\mu)}{1.2\ldots\mu}e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\mu}\right)}.$$

On peut poser

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\mu} = \log\mu + C + \varepsilon_\mu \qquad \left(\lim_{\mu=\infty}\varepsilon_\mu = 0\right);$$

d'où

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_\mu(x) = \dfrac{x(x+1)\ldots(x+\mu)}{\mu!}e^{-x(\log\mu+C+\varepsilon_\mu)}, \\ \varphi_\mu(x+1) = \dfrac{(x+1)(x+2)\ldots(x+\mu+1)}{\mu!}e^{-(x+1)(\log\mu+C+\varepsilon_\mu)}, \\ \dfrac{\varphi_\mu(x+1)}{\varphi_\mu(x)} = \dfrac{x+\mu+1}{\mu x}e^{-(C+\varepsilon_\mu)}. \end{cases}$$

Faisons grandir μ indéfiniment; on obtient la relation

$$(5)\qquad \varphi(x+1) = \frac{1}{x}e^{-C}\varphi(x).$$

2° Reprenons la première des égalités (4); pour μ infini, elle devient

$$(6)\qquad \varphi(x)e^{Cx} = \lim_{\mu=\infty}\left[\frac{x(x+1)\ldots(x+\mu)}{\mu!}\frac{1}{\mu^x}\right] = \frac{1}{\Gamma(x)},$$

d'après la définition donnée (Ire Partie, p. 190). Cette relation montre que *l'inverse de la fonction eulérienne est une transcendante entière,* et *elle en donne la décomposition en facteurs primaires.* Ce résultat est dû à Weierstrass [1].

3° La combinaison des relations (5) et (6) permet de retrouver immédiatement les formules (Ire Partie, p. 191)

$$(7)\qquad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

---

[1] Le produit infini qui représente l'inverse de $\Gamma(x)$ est formé avec *la moitié* des facteurs qui entrent dans le développement de $\sin\pi x$.

Cette analogie entre les fonctions circulaires et les fonctions eulériennes a été poursuivie par Heine : la généralisation de la série hypergéométrique de Gauss l'a conduit à des fonctions qui sont formées avec la moitié des facteurs qui figurent dans le développement des fonctions thêta. Ces fonctions sont aux fonctions doublement périodiques ce que les fonctions eulériennes sont aux fonctions simplement périodiques. *Cf.* APPELL, *M. A.*, t. XIX, p. 84.

Pour généraliser cette dernière identité et celle que l'on en a déduite (Ire Partie, p. 192), remarquons que l'on a

$$(8)\qquad \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{\mu}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{\mu-1}{\mu}\right)=e^{g(x)}\Gamma(\mu x),$$

$g(x)$ désignant une transcendante entière, car les inverses des deux membres sont des transcendantes entières ayant les mêmes racines

$$\left(0,\ -\frac{1}{\mu},\ -\frac{2}{\mu},\ \ldots\right).$$

La combinaison des relations (3) et (6) donne

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=e^{Cx}x\prod_{\mu=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{\mu}\right)e^{-\frac{x}{\mu}}\right];$$

par suite, dans l'égalité (8), $g(x)$ est une fonction linéaire. Posons

$$e^{g(x)}=ae^{bx},$$

et déterminons les constantes a et b en remplaçant dans la formule (8) x par $x+\frac{1}{\mu}$; d'après la première des formules (7), il vient

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{\mu}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{\mu-1}{\mu}\right)x\,\Gamma(x)=ae^{b\left(x+\frac{1}{\mu}\right)}\mu x\,\Gamma(\mu x).$$

Cette relation combinée avec la formule (8) donne

$$e^{b}=\mu^{-\mu}.$$

On obtient ensuite la valeur de a en faisant $x=0$ dans l'égalité (8), et en se rappelant que $x\,\Gamma(x)$ tend vers 1, quand x tend vers zéro. D'où la relation cherchée

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{\mu}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{\mu-1}{\mu}\right)=(2\pi)^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{\mu}\,\mu^{-\mu x}\,\Gamma(\mu x).$$

287. Problème III. — *Former les fonctions entières qui s'annulent en tous les points* $w=2\mu\omega+2\mu'\omega'$, ω *et* ω' *étant des constantes dont le rapport est imaginaire,* μ *et* μ' *désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls.*

La série

$$\sum' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^3} \quad \begin{pmatrix} \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu = \mu' = 0 \text{ exclus} \end{pmatrix}$$

est convergente (Ire Partie, p. 207); elle divergerait si l'on remplaçait l'exposant 3 par une valeur entière moindre. Donc, parmi les transcendantes cherchées, les plus simples sont du genre *deux*. L'une d'elles a pour expression

$$x \prod' \left[\left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{w^2}} \right] \quad \begin{pmatrix} w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ w = 0 \text{ exclus} \end{pmatrix};$$

c'est la fonction σ de Weierstrass (Ire Partie, p. 235).

§ IV. — Fonctions méromorphes : représentations, propriétés.

Après les fonctions entières, les fonctions les plus simples au point de vue des singularités sont celles qui n'ont à distance finie d'autres points singuliers que des pôles : ce sont les fonctions *méromorphes* ou *fractionnaires* [1]. On peut les représenter dans le voisinage de leurs singularités par le quotient de deux séries de puissances, et même dans tout le plan par le quotient de deux fonctions entières; les réciproques sont vraies. Aussi devons-nous revenir sur la division des séries de puissances.

288. Théorème. — 1° *L'inverse d'une série entière $\mathfrak{P}(x)$, convergente dans le voisinage de l'origine et dont le terme indépendant n'est pas nul, est développable en série entière convergente dans le voisinage de l'origine;* 2° *Le rayon de convergence de ce développement est égal à ρ (si l'on a $\rho \overline{\gtrless} r$), ou au moins égal à r (dans l'hypothèse $r < \rho$), r et ρ désignant le rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}(x)$ et le plus petit des modules des racines de cette série.*

Ce théorème résulte évidemment des définitions de Cauchy;

---

(1) Weierstrass désigne souvent ces fonctions sous le nom de *fonctions rationnelles* (*Œuvres*, t. II, p. 79).

Les fonctions elliptiques fournissent l'exemple le plus intéressant de ce type de fonctions.

en voici la démonstration directe par les procédés de Weierstrass ([1]) :

1° Soit

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (a_0 \gtrless 0)$$

la série donnée. On peut déterminer (Ire Partie, p. 133 et 220) un nombre positif ξ tel que l'on ait, dans le domaine $|x| < \xi$,

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots| < |a_0|.$$

Dès lors, si l'on désigne par $-y$ la somme des termes de la série $\mathfrak{P}(x)$, à l'exclusion de a_0, on aura dans ce domaine

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(x)} = \frac{1}{a_0 - y} = \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{y}{a_0} + \ldots + \frac{y^p}{a_0^p} + \ldots\right).$$

Le théorème de la *substitution d'une série dans une autre série* (Ire Partie, p. 224) permet, après avoir remplacé y par sa valeur en x, d'ordonner dans le voisinage de l'origine le résultat suivant les puissances de x, ce qui donne le développement cherché.

2° En aucun cas, le rayon de convergence de la série $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ ne peut évidemment dépasser ρ.

Dans l'hypothèse $\rho \lesseqgtr r$, je dis qu'il est égal à ρ.

En effet, s'il était inférieur à ρ, on pourrait écrire, quel que soit le point α pris sur la circonférence du cercle de convergence de la série $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$,

$$\mathfrak{P}(x) = b_0 + b_1(x-\alpha) + \ldots + b_n(x-\alpha)^n + \ldots \qquad (b_0 \gtrless 0),$$

([1]) Cauchy s'était occupé spécialement du cas où l'on considère l'inverse d'un polynome; il avait déduit de la recherche du rayon de convergence de la série entière qui représente l'inverse de ce polynome un procédé pour obtenir le module de celle des racines du polynome qui a le plus petit module (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 329).

Cette méthode a été reprise par MM. Runge (*A. M.*, t. VI, p. 305) et Hadamard (*J. M.*, 1893). La recherche des zéros d'une *fonction entière* $G(x)$ revient à la recherche des pôles de son inverse : cette fonction inverse est méromorphe, et un calcul facile fournit les coefficients de la série entière qui la définit. Donc *la recherche des zéros de* $G(x)$ *se ramène au calcul des pôles d'une fonction méromorphe* définie par une série entière connue, calcul dont nous parlerons plus bas (n° 294).

et par suite on aurait, dans le voisinage de α,

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(x)} = \frac{1}{b_0 + b_1(x-\alpha)+\ldots} = c_0 + c_1(x-\alpha)+\ldots.$$

La fonction $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ serait régulière *en tout point* α de son cercle de convergence, ce qui est impossible (Ire Partie, p. 292, 306; IIe Partie, p. 168).

On raisonnerait de la même manière dans l'hypothèse $r < \rho$ [1].

289. *Corollaire.* — Le quotient de deux séries entières $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(x)$, convergentes dans le voisinage de l'origine, peut être représenté, dans un domaine déterminé avoisinant ce point, par une série entière augmentée ou non d'une fraction rationnelle (ayant pour seul infini l'origine), suivant que la série dénominateur $\mathfrak{Q}(x)$ s'annule ou ne s'annule pas à l'origine. En d'autres termes, pour un pareil quotient, l'origine est un *point ordinaire* ou un *pôle*.

Pour l'établir, considérons deux cas :

Premier cas : Soit $\mathfrak{Q}(0) \gtrless 0$. — On a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{1}{\mathfrak{Q}(x)} = \frac{1}{b_0 + b_1 x + \ldots} = b'_0 + b'_1 x + \ldots,$$

et par suite, en représentant $\mathfrak{P}(x)$ par $a_0 + a_1 x + \ldots$, le théorème de Cauchy-Mertens (Ire Partie, p. 128) donne

$$\frac{\mathfrak{P}(x)}{\mathfrak{Q}(x)} = a_0 b'_0 + (a_0 b'_1 + a_1 b'_0)x + \ldots = c_0 + c_1 x + \ldots.$$

On voit même, en déterminant de proche en proche par identification les coefficients c_i, qu'ils s'obtiennent en opérant la division des séries $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{Q}(x)$, comme s'il s'agissait de polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable.

La région de convergence du quotient s'étend au moins jusqu'à la racine du dénominateur la plus voisine de l'origine, ou bien jusqu'à la singularité du numérateur ou du dénominateur la plus voisine de l'origine.

---

[1] Il y a un théorème analogue relatif à la région de convergence du développement en série entière de l'inverse d'une série entière *de plusieurs variables* (*cf.* BAKER, *Proceedings of the London M. S.*, 1901-1902, p. 296).

Second cas : L'origine est racine d'ordre p du dénominateur. — On a alors

$$\frac{\mathfrak{P}(x)}{\mathfrak{Q}(x)} = \frac{\mathfrak{P}(x)}{x^p \mathfrak{R}(x)} \qquad [\mathfrak{R}(0) \lesseqgtr 0],$$

$\mathfrak{R}(x)$ désignant une série entière convergente à l'origine.

D'après le premier cas, on peut écrire

$$\frac{\mathfrak{P}(x)}{\mathfrak{R}(x)} = c_p + c_{p-1}x + \ldots + c_1 x^{p-1} + d_0 x^p + d_1 x^{p+1} + \ldots,$$

et par suite, dans le voisinage de l'origine, sauf au point zéro, on a

$$\frac{\mathfrak{P}(x)}{\mathfrak{Q}(x)} = \frac{c_p}{x^p} + \frac{c_{p-1}}{x^{p-1}} + \ldots + \frac{c_1}{x} + d_0 + d_1 x + \ldots.$$

290. Une fonction analytique uniforme, sans point singulier essentiel dans un domaine $\mathfrak{D}$, ou sur sa frontière, n'a dans ce domaine qu'un nombre *limité* d'infinis et de zéros.

En effet, si le nombre des pôles était illimité dans $\mathfrak{D}$, il y aurait un point limite, intérieur à $\mathfrak{D}$ ou sur sa frontière, contenant dans son voisinage une infinité de pôles de la fonction (Ire Partie, p. 21). Ce point ne serait pour la fonction ni un point ordinaire (puisqu'un point ordinaire est isolé de tout pôle), ni un pôle (puisqu'un pôle est isolé de tout pôle) : ce serait donc un point essentiel.

La seconde partie de la proposition résulte de la première, rapprochée de cette remarque : les zéros d'une fonction holomorphe sont des infinis pour son inverse.

En particulier, *dans tout domaine borné, une fonction transcendante entière a un nombre fini de racines, et une fonction méromorphe a un nombre fini de pôles* (1).

291. La nature du point à l'infini, qui a déjà servi à distinguer les polynomes des fonctions entières transcendantes, permet aussi de caractériser la différence entre les deux types de fonctions

(1) Ainsi, pour qu'une suite de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ puisse représenter *les zéros d'une fonction entière* ou *les pôles d'une fonction méromorphe*, il faut que leur ensemble n'ait pas de point limite à distance finie. Nous avons vu (p. 173) ou nous verrons (n° 293) que ces conditions sont suffisantes.

méromorphes, c'est-à-dire entre les fractions rationnelles et les fonctions fractionnaires transcendantes.

THÉORÈME. — *Une fonction analytique uniforme, n'ayant à distance finie* OU INFINIE *que des singularités polaires, est une fraction rationnelle.*

D'abord, une pareille fonction $f(x)$ a un nombre limité de pôles; car le point à l'infini étant un point ordinaire ou un pôle, on peut l'isoler des autres singularités par une circonférence C de rayon suffisamment grand. Or, à l'intérieur de cette circonférence, la fonction n'a qu'un nombre limité de pôles, d'après ce que nous venons de voir (p. 192).

Désignons par $a_1, \ldots, a_n$ les pôles intérieurs à C; par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ leurs degrés de multiplicité. Le produit

$$(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}f(x)$$

demeure fini en tout point à distance finie, d'après la définition de pôle; dès lors, en vertu du théorème de Cauchy-Liouville généralisé (p. 93), c'est une constante ou un polynome, puisque le point infini est un pôle; $f(x)$ est bien une fraction rationnelle ([1]).

On en conclut qu'une fonction fractionnaire transcendante a le point à l'infini comme point singulier essentiel.

292. *Première représentation des fonctions méromorphes* (Weierstrass).

([1]) C'est en s'occupant des fonctions méromorphes doublement périodiques que M. Méray fut amené à ce théorème; voici en quels termes il l'énonça :

« Une fonction sera rationnelle si, étant toujours continue, monodrome et monogène, elle présente un nombre limité d'infinis, et si, pour une valeur infinie du module de la variable, elle prend une valeur unique et déterminée finie ou infinie, et ne le sera pas dans les autres cas » (*C. R.*, 1855, 1er semestre, p. 788).

Cf. aussi WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 79.

Il est facile d'étendre ce théorème aux fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) : *une pareille fonction, quand elle n'a d'autres points singuliers que des pôles, est une fonction rationnelle de x et y* (*cf.* BRIOT, *Fonctions abéliennes*, Note B).

Le théorème est encore vrai des fonctions analytiques uniformes de plusieurs variables (n° 305).

THÉORÈME. — *Une fonction méromorphe peut être représentée dans tout le plan par le quotient de deux fonctions entières. Réciproquement, un pareil quotient définit une fonction méromorphe* ([1]).

En effet, les nombres qui représentent les pôles d'une fonction méromorphe $f(x)$ vérifient les conditions nécessaires et suffisantes (p. 192 et 173) pour que l'on puisse former une fonction entière, transcendante ou non, $G(x)$ admettant pour racines (et pour seules racines) les pôles de la fonction $f(x)$, avec un degré de multiplicité égal au degré d'infinitude. C'est dire que le produit $f(x)\,G(x)$ est une fonction analytique uniforme, régulière dans tout domaine fini; c'est donc une fonction entière $G_1(x)$. Par suite on a

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G(x)};$$

les fonctions G et G_1 n'ont pas de zéro commun, car les racines de G donnent au produit fG des valeurs finies et différentes de zéro.

La réciproque est évidente. En effet, le quotient de deux fonctions entières, sans zéro commun, n'a à distance finie d'autres singularités que les zéros du dénominateur, et ces singularités sont des pôles (p. 191) (des deux fonctions G et G_1 l'une au moins doit être transcendante; sinon leur quotient n'aura pas, même à l'infini, de singularité essentielle).

Remarque. — La transformation $\left(x, \frac{1}{x-a}\right)$ permet d'en conclure que le quotient $G_1\left(\frac{1}{x-a}\right) : G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est l'expression la plus générale des fonctions analytiques uniformes qui ont une infinité

([1]) WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 102 (trad. *A. E. N.*, 1879).

Exemple. — Les fonctions elliptiques se présenteront plus tard sous la forme du quotient de fonctions θ (*voir* Ire Partie, p. 248).

Plus généralement, une fonction méromorphe ayant pour zéros des points $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et pour pôles des points $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ peut être regardée comme le quotient de deux fonctions méromorphes ayant l'une respectivement pour zéros et pour pôles une partie des points a_n et b_n, l'autre respectivement pour pôles et pour zéros les points a_n et b_n restants.

de pôles et le point a comme seul point essentiel (des deux fonctions entières G_1 et G l'une au moins est transcendante, et ces fonctions n'ont pas de zéro commun).

293. *Représentation des fonctions méromorphes par des séries de fractions rationnelles* (Mittag-Leffler). — C'est la représentation des fractions rationnelles par le quotient de deux polynomes que nous venons de généraliser. Mais une fraction rationnelle peut aussi être regardée comme une somme de termes dont chacun possède un seul pôle. Comment étendre aux fonctions méromorphes ce mode de décomposition en éléments simples ([1])?

Voici le résultat fondamental auquel M. Mittag-Leffler est parvenu :

Soit un ensemble infini E sans point limite à distance finie : nous en supposerons les éléments rangés par ordre de modules croissants ou stationnaires en une suite

$$(\mathrm{E}) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad \left(|a_n| \overline{\overline{<}} |a_{n+1}|;\ \lim_{n=\infty} a_n = \infty\right);$$

si plusieurs éléments, en nombre forcément limité, ont le même module, on les place dans un ordre arbitraire. A chacun des points a_n de l'ensemble faisons correspondre une fraction rationnelle $R_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ ayant comme pôle unique le point a_n. Dans ces conditions, *il existe une fonction méromorphe ayant pour pôles les points donnés et pour parties principales correspondantes les fractions considérées* ([2]).

D'une manière plus précise, nous prouverons qu'en retranchant de chaque fraction R_n un polynome convenable $P_{\nu_n}(x)$, dont le

---

([1]) Le théorème de Weierstrass peut être considéré, avons-nous dit (p. 177, note), comme un corollaire de celui de M. Mittag-Leffler. Inversement, de la décomposition en facteurs primaires d'une fonction entière $G(x)$, on conclut un développement de sa dérivée logarithmique (fonction méromorphe n'ayant que des pôles simples) en une série de termes rationnels en x : on peut dire que c'est ce résultat qui conduit à se poser la question plus générale résolue par M. Mittag-Leffler.

([2]) Ce théorème, démontré d'abord par M. Mittag-Leffler (*Bulletin de l'A. R. de Suède*, 1877) a été ensuite établi très simplement par Weierstrass (*Œuvres*, t. II, p. 189), puis avec quelques restrictions par Hermite (*J. de Crelle*, t. 91, p. 54).

degré en général croît indéfiniment avec n, on obtient une série

$$(\text{M}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\text{R}_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-\text{P}_{\nu_n}(x)\right]$$

qui converge absolument et uniformément dans tout domaine fermé ne contenant aucun des points a_n [1]. La fonction la plus générale du type cherché s'en déduit par l'addition d'une fonction entière arbitraire $\text{G}(x)$.

Comme nous traiterons au Paragraphe suivant un problème plus général, nous nous contenterons ici, en vue des applications, de le résoudre dans l'hypothèse où il existe un entier ω tel que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^\omega}$ converge, où tous les pôles sont d'un même ordre de multiplicité λ, enfin où les parties principales données renferment un terme unique, dont nous prendrons le numérateur égal à l'unité [2]. Pour la démonstration nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — Supposons d'abord $\lambda = \omega$.

Appelons $\mathfrak{D}$ un domaine borné quelconque ne contenant aucun des points de l'ensemble E [3], et R le maximum de $|x|$ dans ce

---

(1) L'adjonction de ces polynomes $\text{P}_{\nu_n}(x)$ aux fractions R_n a pour but de rendre convergente la série (M), sans d'autre part introduire de singularité nouvelle.

Weierstrass prenait comme polynomes P_{ν_n} les polynomes formés par les premiers termes du développement de R_n suivant les puissances croissantes de x (de même, ce sont les intégrales de ces polynomes qui figurent en exposant dans les facteurs primaires choisis habituellement par Weierstrass); ce sont les séries correspondantes que M. Borel appelle *séries canoniques*. M. Mittag-Leffler a montré que l'on peut choisir d'une infinité de manières ces polynomes P_{ν_n} (n° 295).

(2) Par exemple, il suffit d'avoir traité ce cas pour pouvoir écrire les formules (2) (Iʳᵉ Partie, p. 183) et (3) (Iʳᵉ Partie, p. 238) qui donnent les développements des fonctions $\cot x$ et $p x$, considérées comme définies par leurs pôles et leurs propriétés de périodicité. Pour ces fonctions, on a respectivement $\omega = 2$, $\lambda = 1$, et $\omega = 3$, $\lambda = 2$.

La seule difficulté (c'est du reste celle qui se présente d'ordinaire quand il faut appliquer la formule de M. Mittag-Leffler à une fonction donnée) réside dans la détermination de la fonction complémentaire $\text{G}(x)$.

Cf. Hermite, *Cours, etc.*, 4ᵉ édit., p. 102. — Picard, *Analyse*, t. II, p. 160 et 165. — Burkhardt, *Einführung, etc.*, p. 144.

(3) C'est par exemple le domaine limité par une circonférence C de rayon déterminé (aussi grand que l'on veut), et par des circonférences de rayons très petits entourant respectivement chacun des points de E intérieurs à C.

domaine. On peut répartir les pôles a_n en deux catégories, suivant que l'on a

$$|a_n| \leqq k\mathrm{R}, \qquad |a_n| > k\mathrm{R},$$

k désignant une constante arbitraire supérieure à l'unité. La première classe contient un nombre fini μ de points. En chacun des points a_n de la seconde classe, quel que soit le point x de $\mathfrak{D}$, on a

$$(1) \qquad \left|\frac{a_n}{x - a_n}\right| = \left|1 - \frac{x}{a_n}\right|^{-1} < \frac{k}{k-1}.$$

Considérons la série

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x - a_n)^{\omega}} = \sum_{n=1}^{\mu} \frac{1}{(x - a_n)^{\omega}} + \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{(x - a_n)^{\omega}}.$$

La première partie du second membre renferme un nombre limité de termes tous finis. On a ensuite une série dont les termes se déduisent de ceux de la série numérique convergente $\sum |a_n|^{-\omega}$ en les multipliant par une grandeur dont le module reste inférieur à un nombre fixe (indépendant de x et de n), d'après l'inégalité (1).

Donc la série (2), qui répond à l'énoncé, converge absolument et uniformément dans le domaine $\mathfrak{D}$.

Second cas. — Supposons $\lambda \gtrless \omega$, et d'abord $\lambda > \omega$. Les termes de la série

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x - a_n)^{\lambda}}$$

se déduisent des termes de la série (2) en multipliant ceux-ci par le facteur $(x - a_n)^{\omega-\lambda}$. Le module de ce facteur n'atteint pas $r^{\omega-\lambda}$ pour les points x extérieurs à des cercles de rayon fixe r, ayant pour centres les points a_n. Donc la série (3), qui répond à l'énoncé, converge absolument et uniformément, comme la série (2), dans le domaine $\mathfrak{D}$.

Soit $\lambda < \omega$. Intégrons la série (2), uniformément convergente dans $\mathfrak{D}$, terme par terme, entre deux limites arbitraires, le long d'un chemin arbitraire intérieur à $\mathfrak{D}$; il vient

$$-\frac{1}{\omega - 1} \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x - a_n)^{\omega}}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(x - a_n)^{\omega-1}} - \frac{1}{(x_0 - a_n)^{\omega-1}}\right].$$

On sait que la série obtenue au second membre converge uniformément; donc le théorème est établi pour $\lambda = \omega - 1$.

Raisonnons sur cette série comme nous l'avons fait sur la série (2). Son intégration terme par terme conduit à une série uniformément convergente du type

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-a_n)^{\omega-2}} - \alpha_0 - \alpha_1 x\right]$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que, après $\omega - \lambda$ opérations, on obtienne une série

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-a_n)^{\lambda}} - \alpha_0^n - \alpha_1^n x - \ldots - \alpha_{\omega-\lambda-1}^n x^{\omega-\lambda-1}\right]$$

absolument et uniformément convergente dans $\mathfrak{D}$, répondant à l'énoncé.

En ajoutant aux séries (2), (3), (4) une fonction entière transcendante arbitraire $G(x)$, on obtient les fonctions les plus générales du type cherché.

294. Le principal avantage, avons-nous dit (Ire Partie, p. 319), des développements des fonctions méromorphes que nous venons d'obtenir, c'est qu'une expression analytique unique représente la fonction dans tout son domaine d'existence; de plus l'un de ces développements met en évidence les singularités de la fonction, l'autre ramène la recherche de ses zéros et de ses pôles au calcul des zéros de fonctions entières.

Nous ne reviendrons sur la définition d'une fonction méromorphe par le procédé de Weierstrass applicable à toute fonction analytique, c'est-à-dire sur sa définition au moyen d'un *élément* initial, que pour énoncer des théorèmes simples qui font connaître des relations entre les valeurs des coefficients de cet élément [1] et les valeurs des affixes des pôles de la fonction.

---

[1] Le premier, M. Darboux a montré, dans son important *Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*J. M.*, 1878, p. 17), que la valeur des coefficients de la série dépend de la nature des points singuliers de la fonction sur le cercle de convergence. Les théorèmes que nous allons énoncer sont dus à M. Hadamard.

Soit $f(x)$ une fonction analytique définie par une série entière

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

le rayon de convergence de cet élément (Ire Partie, p. 137) et par suite le module de la singularité dont le module est le plus petit (Ire Partie, p. 306) a pour valeur $\dfrac{1}{\limsup\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

1° Supposons que la fonction $f(x)$ n'ait sur le cercle de convergence C de l'élément $\mathfrak{P}(x)$ qu'*une singularité* α et que α soit *un pôle,* simple ou multiple : on a alors (¹)

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \alpha.$$

De plus, quand ce pôle est *simple,* la différence entre $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ et sa limite α a un module inférieur à la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre fixe inférieur à 1. Réciproquement, quand le rapport $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers une limite (appelons-la α), de manière que la différence entre ce rapport et sa limite finisse par avoir un module inférieur à la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre fixe plus petit que 1, *le point α est un pôle simple* pour la fonction $f(x)$ (²).

Quand le pôle α est *multiple,* son ordre de multiplicité est

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Ainsi, dans le cas d'un pôle unique, on peut calculer et son affixe, et son degré de multiplicité (³).

2° Supposons que les seules singularités de la fonction $f(x)$ sur

(¹) Rappelons que si le rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ a une limite, $\sqrt[n]{|a_n|}$ a aussi une limite et la même limite; son inverse est alors le rayon de convergence (Ire Partie, p. 138).

(²) Pour le théorème direct, *cf.* DARBOUX, *J. M.*, 1878, p. 15. — HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement,* 1901, p. 38. Pour la réciproque, *cf.* HADAMARD, *J. M.*, 1892, p. 118.

(³) BOREL, *Fonctions méromorphes,* p. 23.

le cercle C soient *deux pôles simples* α_1 et α_2. On a alors

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \alpha_1 \alpha_2.$$

3° Supposons qu'à l'intérieur d'un cercle concentrique au cercle C, la fonction $f(x)$ ait $p+1$ pôles, simples ou multiples, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ et n'ait pas d'autres singularités. Introduisons le déterminant

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+p} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & a_{n+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+p} & a_{n+p+1} & \ldots & a_{n+2p} \end{vmatrix}.$$

On a cette fois

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|D_{n,p}|}} = |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}|.$$

S'il y a des pôles multiples, on doit compter chacun d'eux autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité (1).

Réciproquement, on peut trouver à quelles conditions la fonction $f(x)$ n'a sur la circonférence C que des pôles, et former une équation qui ait pour racines les affixes de ces pôles. On peut même obtenir les pôles situés à l'intérieur de tout cercle C′ concentrique à C, pourvu que la fonction reste méromorphe dans C′. Ces recherches reposent sur la formation d'une suite de déterminants de même type que $D_{n,p}$, et sur la considération des limites supérieures pour n infini de leurs racines $n^{\text{ièmes}}$, pour toutes les valeurs de l'indice p (2).

Mentionnons encore ce théorème : une fonction méromorphe dans un cercle de rayon supérieur à l'unité ne saurait être représentée dans ce cercle par un développement de Taylor *à coeffi-*

---

(1) *Cf.* HADAMARD, *J. M.*, 1892, p. 119; *La série de Taylor, etc.*, p. 39. — BOREL, *Fonctions méromorphes*, p. 26 et 38. Comme nous l'avons dit (p. 190, note), M. Hadamard a déduit, de l'étude des pôles des fonctions méromorphes, un procédé pour le calcul des zéros des fonctions entières (*J. M.*, 1893).

(2) *Voir* les références ci-dessus.

cients entiers (ou entiers complexes) sans se réduire au quotient de deux polynomes à coefficients entiers (ou entiers complexes) [1].

§ V. — Fonctions analytiques uniformes dont les singularités sont dénombrables.

295. Reprenons d'abord l'étude des fonctions analytiques uniformes n'ayant à distance finie que des singularités *isolées*, mais en les supposant désormais polaires ou *essentielles*. Leur ensemble E n'a pas de point limite à distance finie [2], par suite, on en peut ranger les éléments par ordre de modules croissants ou stationnaires.

D'après le théorème de Laurent, chacune de ces singularités a_n est caractérisée par une fonction quasi-entière à un seul point singulier essentiel ou une fraction rationnelle $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, sans terme indépendant. Aussi, le problème de la recherche des fonctions analytiques uniformes n'ayant à distance finie que des singularités isolées se pose sous la forme suivante :

Étant donné un ensemble E *de nombres* [3]

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots \qquad \left(|a_n| \overline{\overline{<}} |a_{n+1}|;\ a_1 \gtrless 0;\ \lim_{n=\infty} a_n = \infty\right),$$

à chacun desquels correspond une fonction donnée G_n, *existe-t-il une fonction analytique uniforme* $f(x)$ *ayant pour seules singularités à distance finie les points* a_n, *et pour parties principales correspondantes les fonctions* G_n; *quelle en est l'expression analytique?*

M. Mittag-Leffler a prouvé l'existence de pareilles fonctions et en a obtenu un développement qui est valable dans tout le plan et met en évidence les points de E; il y est parvenu en suivant la

---

(1) Borel, *B. D.*, 1894, p. 23; *Fonctions méromorphes*, p. 32.

(2) En effet, tout point limite de points singuliers est aussi un point singulier (Ire Partie, p. 304).

(3) On peut toujours supposer que l'origine n'est pas un zéro pour une fonction entière, et n'est pas un pôle pour une fonction méromorphe (car on peut toujours déplacer l'origine). De même, on peut toujours supposer que l'origine n'appartient pas à l'ensemble isolé E.

méthode indiquée par Weierstrass [1] pour le cas où toutes les singularités ci-dessus sont des pôles [2].

Voici comment il procède.

Chaque fonction donnée G_n (même la première fonction G_1 puisque a_1 n'est pas nul) est développable en série entière convergente dans le domaine $|x| < |a_n|$. Séparons la série obtenue en deux parties : la première sera un polynome $P_{\nu_n}(x)$ renfermant les termes d'exposant inférieur à un nombre ν_n, variable avec n, dont nous fixerons une limite inférieure; la seconde $\mathfrak{R}_{\nu_n}(x)$ contiendra les autres termes et représentera le reste de la série. On a ainsi

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = P_{\nu_n}(x) + \mathfrak{R}_{\nu_n}(x) \qquad (|x| < |a_n|).$$

Désignons par k un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité, et introduisons une suite infinie de quantités positives $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ telles que la série $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ soit convergente. Pour chaque discontinuité a_n, on peut déterminer un nombre ν_n (et, dès lors, une infinité de nombres ν_n) par la condition que la somme des modules des termes de $\mathfrak{R}_{\nu_n}(x)$ ne dépasse pas ε_n au point x de l'axe réel ayant pour abscisse $k|a_n|$. S'il en est ainsi en ce point, *a fortiori* en sera-t-il de même dans le domaine $|x| \overline{\overline{<}} k|a_n|$, et l'on aura dans ce domaine

$$(1) \qquad \left| G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_{\nu_n}(x) \right| = |\mathfrak{R}_{\nu_n}(x)| < \varepsilon_n.$$

Considérons alors la série

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_{\nu_n}(x) \right].$$

Je dis d'abord qu'*elle est holomorphe dans tout le plan*, sauf au voisinage des points de discontinuité a_n.

---

(1) *Monatsberichte der A. zu Berlin*, 1880; *Œuvres*, t. II, p. 189. *Voir* aussi Borel, *Fonctions méromorphes*, 1903, p. 10.

(2) *Cf.* Mittag-Leffler, *B. D.*, 1879; *C. R.*, 1882, et surtout son Mémoire fondamental sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes (*A. M.*, t. IV, 1884).

Ses théorèmes ont été étendus, dans une certaine mesure, aux fonctions de p variables. *Cf.* Cousin, *A. M.*, t. XIX, p. 38.

En effet, soit x un point distinct de ces discontinuités. Si grand que soit son module r, on peut trouver une valeur n' de n telle que, si l'on considère dans E l'élément $a_{n'}$ correspondant, on ait $r < k|a_{n'}|$. Séparons la série (2) en deux parties, contenant respectivement ses $n' - 1$ premiers termes et les termes restants.

La première partie $(n < n')$ a une valeur finie et déterminée en tout point x distinct des discontinuités, puisqu'elle a un nombre limité de termes, et que chacun d'eux $G_n - P_{n_\nu}$ est la différence de grandeurs déterminées. La seconde $(n \geqq n')$ est une série dont chaque terme $\mathfrak{A}_{\nu_n}$ est une série entière convergente dans le domaine $|x| < |a_n|$, et *a fortiori* dans le domaine $|x| \leqq r$, puisque l'on a

$$|a_{n'}| \leqq |a_n|.$$

De plus, à chacun de ces termes, on peut appliquer les inégalités (1) dans le domaine $|x| \leqq r$: ces termes $\mathfrak{A}_{\nu_{n'}}, \mathfrak{A}_{\nu_{n'+1}}, \ldots$ ont leurs modules inférieurs à ceux de la suite $\varepsilon_{n'}, \varepsilon_{n'+1}$. De la convergence de la série numérique $\sum_{n=n'}^{\infty} \varepsilon_n$ on peut donc déduire la convergence uniforme de la série $\sum_{n=n'}^{\infty} \mathfrak{A}_{\nu_n}(x)$; par suite (Ire Partie, p. 219 ou IIe Partie, p. 95) cette série est holomorphe dans le domaine $|x| \leqq r$.

On en conclut que la série (2) converge absolument en tout point x n'appartenant pas à l'ensemble E, et uniformément dans le voisinage de chacun de ces points x. Elle représente une fonction satisfaisant aux conditions du problème.

Pour en déduire une expression pouvant représenter *toutes* les fonctions $f(x)$ du type défini, on remarque que, d'après la définition de fonction caractéristique, chaque différence

$$f(x) - G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) \quad \text{ou} \quad f(x) - \left[G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) - P_{\nu_n}(x)\right]$$

est holomorphe dans le voisinage de a_n. Dès lors, l'expression

$$f(x) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) - P_{\nu_n}(x)\right]$$

sera holomorphe dans tout le plan. Désignons par $G(x)$ cette fonction entière transcendante; l'expression générale des fonctions cherchées sera

$$(3)\qquad f(x) = G(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_{\nu_n}(x)\right].$$

C'est la formule de M. Mittag-Leffler. La série obtenue converge absolument dans tout le plan, sauf aux points $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, et uniformément dans tout domaine fermé ne contenant aucun de ces points (¹).

296. M. Mittag-Leffler a ensuite étudié le cas où l'on considère un ensemble *isolé quelconque* E, dont tous les points doivent être

---

(¹) Si le point zéro figurait dans l'ensemble E avec la fonction caractéristique $G_0\left(\frac{1}{x}\right)$, on pourrait, avons-nous dit, ramener ce cas au cas traité dans le texte par un changement d'origine; on pourrait aussi obtenir la fonction cherchée $f(x)$ en ajoutant cette transcendante G_0 au second membre de la relation (3).

Les polynomes P_{ν_n} que l'on a introduits pour assurer la convergence du développement n'ont pas une seule et unique détermination, puisque l'on peut choisir d'une infinité de manières la constante k et les nombres de la suite ε. La détermination pratique des degrés de ces polynomes a été étudiée par divers auteurs. *Cf.* JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. II, p. 316. — HERMITE, *Cours, etc.*, 4ᵉ édit., p. 100.

Exemples. — Représentons par a une constante positive, par b un nombre quelconque, par c et d des nombres réels, et considérons les fonctions

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)},\quad \cot x,\quad \frac{H'(x)}{H(x)},\quad \frac{\Gamma(b)\Gamma(x)}{\Gamma(b+x)},\quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c+x)\Gamma(d+x)}.$$

Pour les développer en série de Mittag-Leffler, il suffit de prendre respectivement, comme polynomes P_{ν_n}, *zéro*, des *constantes*, des polynomes du *premier degré*, des polynomes dont le degré est *limité*, mais peut être *quelconque*, des polynomes dont le *degré croît indéfiniment* avec n. Ce sont encore des polynomes dont le degré finit par croître au delà de toute limite qu'il faut retrancher de chaque partie principale, pour obtenir le développement des fonctions doublement périodiques de troisième espèce (on obtient de pareilles fonctions en divisant un produit de fonctions Θ par un produit de fonctions de même forme).

Cf. HERMITE, *J. de Crelle*, t. 92, p. 145; *Cours, etc.*, 4ᵉ édition, p. 150, 153. — APPELL, *A. E. N.*, 1885, p. 67.

des singularités pour la fonction à représenter ([1]), et, par suite, le cas où cette fonction a comme singularités tous les points de $E+E'$, E' désignant l'ensemble dérivé de E (Ire Partie, p. 304).

Un ensemble isolé est dénombrable (p. 184, note); aussi on peut supposer les éléments de E rangés en une suite linéaire $a_1, \ldots, a_n, \ldots$. A chaque élément a_n faisons correspondre une fonction quasi-entière à une seule singularité, $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, s'évanouissant avec $(x-a_n)^{-1}$ ([2]).

Théorème. — *On peut former une expression analytique qui soit régulière dans tout le plan, sauf au voisinage des points de l'ensemble* $E+E'$, *et qui devienne régulière dans le*

([1]) Avant M. Mittag-Leffler, Weierstrass (1876) avait représenté les fonctions qui ont *un nombre fini de singularités* isolées $(c_1, \ldots, c_n)$ sous les formes

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right), \quad \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) R(x),$$

et celles qui ont un nombre fini de points essentiels $(c_1, \ldots, c_n)$ et *un nombre quelconque de pôles* sous les formes

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}, \quad \frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} R(x);$$

les éléments $G_1, \ldots, G_{2n}$ sont tels que deux d'entre eux n'aient pas de zéro commun, et qu'aucun d'eux ne s'annule en l'un des points c_ν; $R(x)$ est une fraction rationnelle qui n'a ni racines, ni pôles en dehors des points c_ν.

Les réciproques sont vraies (Weierstrass, *Œuvres*, t. II, p. 116).

En s'aidant de la transformation $\left(2x, x+\frac{c^2}{x}\right)$, M. Picard avait facilement étendu ces théorèmes de Weierstrass aux fonctions analytiques uniformes qui ont un nombre fini de lignes singulières et un nombre quelconque de pôles (*C. R.*, 1882, 1er semestre, p. 1405).

([2]) Précédemment (p. 201), E' renfermait un seul point, le point infini; ici, pour abréger, nous supposerons que E' a tous ses points à distance finie (et que ∞ ne fait pas partie de E). Mais le raisonnement n'exclut pas cette hypothèse : si E' renfermait le point infini, on remplacerait dans ce qui va suivre $a_n - x$ et $\frac{a_n - \infty}{x - \infty}$ par $\frac{1}{a_n}$ et $\frac{x}{a_n}$.

voisinage de chaque point a_n *de* E, *lorsqu'on en retranche la fonction correspondante* $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ (¹).

Commençons par une remarque. Les nombres $|a_n - a'|$ (a_n représente un point *particulier fixe* de E et a' désigne successivement chacun des points de E′) ont une limite inférieure ρ_n qui n'est ni nulle, ni infinie, et il y a un ou plusieurs points a' de E′ tels que $|a_n - a'| = \rho_n$. Appelons a'_n ce point ou l'un de ces points choisi arbitrairement s'il y en a plusieurs. Ainsi, à chaque point a_n de E correspond un nombre ρ_n et un point a'_n de E′.

Il n'y a jamais une infinité de points a_n pour lesquels $\rho_n \gtreqless \alpha$, α désignant un nombre positif arbitraire. En effet, s'il y avait une infinité de points a_n dont la distance à leurs correspondants surpassât α, ces points a_n auraient un point limite a' (Iʳᵉ Partie, p. 21), point limite qui ferait partie de E′. Dans le voisinage de ce point a', il y aurait une infinité de points a_n tels que pour ces points $|a_n - a'|$ surpasserait α (en vertu de l'hypothèse), et tels que pour ces mêmes points $|a_n - a'|$ serait inférieur à tout nombre donné, et par suite à α (puisque a' serait un point limite pour ces points) : il y a contradiction.

C'est dire que, à tout nombre *arbitraire* α correspond un nombre fini N tel que l'hypothèse $n \gtreqless N$ entraîne $\rho_n < \alpha$ (en d'autres termes, $|a_n - a'_n|$ tend vers zéro, quand n grandit indéfiniment).

Cette remarque faite, revenons au théorème.

Chaque fonction G_n (on suppose que a_n n'est ni nul, ni infini) est développable, dans le domaine $|x - a'_n| > |a_n - a'_n|$, en série procédant suivant les puissances de $a_n - a'_n : x - a'_n$ (Iʳᵉ Partie,

---

(¹) Cette expression analytique représente une fonction monogène uniforme dans le cas où l'on restreint le choix de l'ensemble E, en supposant que l'ensemble E + E′ constitue la frontière complète d'un domaine continu $\mathfrak{D}$ d'un seul tenant (*A. M.*, t. IV, p. 22).

M. Mittag-Leffler a aussi obtenu (p. 32) une expression analytique représentant, sous forme de produit infini, une fonction monogène uniforme qui est régulière et différente de zéro dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, s'annule aux points de E à la manière des fonctions entières, et a les points de E′ comme points singuliers essentiels. C'est une généralisation des théorèmes de Weierstrass (p. 173) et de M. Picard (p. 184).

p. 223; II[e] Partie, p. 106). Séparons comme ci-dessus ce développement en deux parties : un polynome $P_{\nu_n}\left(\frac{a_n - a'_n}{x - a'_n}\right)$, une série $\mathfrak{R}_{\nu_n}\left(\frac{a_n - a'_n}{x - a'_n}\right)$, le nombre ν_n étant choisi de façon que le module de ce reste n'atteigne pas ε_n dans le domaine

$$k\,|\,x - a'_n\,| \overline{\gtrless}\, |\,a_n - a'_n\,|,$$

ε_n et k ayant le même sens que précédemment. Je dis que la série

$$(2') \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) - P_{\nu_n}\left(\frac{a_n - a'_n}{x - a'_n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}_{\nu_n}\left(\frac{a_n - a'_n}{x - a'_n}\right)$$

répond à l'énoncé.

En effet : 1° soit x_0 un point à distance finie *n'appartenant pas à l'ensemble* $E + E'$: les points x d'un ensemble $\mathcal{C}$ défini par la relation $|\,x - x_0\,| \overline{\gtrless}\, \rho$, où ρ a une valeur déterminée, jouiront de la même propriété. Les nombres $|\,x - a'\,|$, où x et a' désignent des points quelconques de $\mathcal{C}$ et de E', ont une limite inférieure l; par suite, dans l'ensemble $\mathcal{C}$, on a toujours

$$|\,x - a'_n\,| \overline{\gtrless}\, l.$$

Posons

$$\alpha = kl \qquad (k < 1).$$

Puisque l'on a

$$|\,a_n - a'_n\,| < \alpha$$

pour les valeurs de n égales ou supérieures à un nombre fixe N, on a, pour ces mêmes valeurs,

$$|\,a_n - a'_n : x - a'_n\,|$$

inférieur à $\alpha : l$ ou à k. Il en résulte que l'on peut déterminer un nombre N′ assez grand pour que l'on ait à la fois en tous les points de $\mathcal{C}$

$$\left|\frac{a_n - a'_n}{x - a'_n}\right|_{(n \overline{\gtrless} N')} < k, \qquad \sum_{n=N'}^{\infty} |\,\mathfrak{R}_{\nu_n}\,| < \sum_{n=N'}^{\infty} \varepsilon_n.$$

Donc, le développement de G_n, suivant les puissances de $a_n - a'_n : a - a'_n$, converge en tous les points de $\mathcal{C}$, et de plus

dans ce domaine la série (2′) converge uniformément. Du reste, G_n est holomorphe dans le voisinage de x_0; par suite, la série (2′) est elle-même holomorphe dans ce voisinage (Ire Partie, p. 219; IIe Partie, p. 95).

2° Considérons maintenant *un point a_p de* E. On peut définir autour de a_p un domaine $\mathcal{C}_1$ assez petit pour que, dans ce domaine, a_p soit le seul point appartenant à $E + E'$. De même que la série (2′) convergeait uniformément dans le domaine $\mathcal{C}$, de même, si l'on retranche de cette série la fonction $G_p\left(\frac{1}{x-a_p}\right)$, la différence obtenue sera uniformément convergente dans le domaine $\mathcal{C}_1$, et, par suite, cette différence sera holomorphe dans $\mathcal{C}_1$.

Donc, la série (2′) jouit bien des deux propriétés énoncées (1).

M. Mittag-Leffler a étendu ces recherches (2). *Il a réparti les fonctions analytiques en deux classes, suivant que leurs singularités forment ou non un ensemble dénombrable : les premières sont représentées par des sommes d'expressions ana-*

---

(1) Il y a une infinité de séries (2′) répondant à l'énoncé, puisqu'on peut choisir d'une infinité de manières les nombres k, ε_1, ε_2, ..., et que dans certains cas on peut choisir entre plusieurs éléments de E′ celui que l'on associera à a_n.

(2) *A. M.*, t. IV, p. 57. Disons seulement quelques mots du point de départ qu'il adopte.

M. Cantor distingue *deux classes de nombres*. Ceux de la première classe résultent du principe habituel de formation des entiers : on les obtient en ajoutant l'unité à tout nombre déjà formé. Ils sont représentés par la suite 1, 2, ..., n, ...

Les nombres de la seconde classe s'obtiennent soit par l'application de la loi ci-dessus, soit par un second principe qui consiste à faire correspondre par définition à toute suite indéfinie de nombres croissants *un nouveau nombre immédiatement supérieur* à tous ceux de cette suite. Ainsi, le symbole ω désignant le plus petit nombre transfini (Ire Partie, p. 18), les nombres de la seconde classe seront

$$\omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \omega+n,\ \ldots,\ \omega.2,\ \omega.2+1,\ \ldots,\ \omega.3,\ \ldots,\ \omega.n,\ \ldots,$$
$$\omega^2,\ \ldots,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots.$$

Cela posé, soit E un ensemble quelconque situé dans un espace continu à n dimensions. S'il n'est pas de première espèce (Ire Partie, p. 22), ses ensembles dérivés E′, ..., E^n, ... ont tous un ensemble commun, que l'on désigne par E^ω. Cet ensemble E^ω peut avoir un nombre fini ou infini de dérivés $E^{\omega+1}$, $E^{\omega+2}$, ... S'il en a un nombre infini, les ensembles E^ω, $E^{\omega+1}$, ... ont un ensemble commun,

lytiques qui peuvent être rangées en série simple et sont formées d'éléments possédant chacun un seul point singulier (ces points sont les points singuliers de la fonction).

§ VI. — Fonctions analytiques de plusieurs variables (¹).

297. Pour introduire de pareilles fonctions, comme pour étudier celles d'*une seule* variable, Weierstrass part de la considération d'une série entière : cet *élément* représente dans sa région de convergence une fonction, qui se trouve ensuite définie et représentée dans tout son domaine d'existence par un système monogène de séries de puissances (Iʳᵉ Partie, p. 330) (²).

Ce domaine $\mathfrak{D}$ renferme l'ensemble des points que l'on peut atteindre par prolongement; il est continu et d'un seul tenant : en chaque point intérieur, la fonction est régulière; tout point de sa frontière est appelé *point singulier*.

Montrons qu'il existe toujours de pareils points ou encore que *le domaine $\mathfrak{D}$ est borné* (³).

---

que l'on représente par $E^{\omega.2}$. Même loi pour la formation, s'il y a lieu, d'ensembles $E^{\omega.3}$, ..., E^{ω^ω}, ...

De là, la répartition des ensembles de points singuliers en classes auxquelles pourra correspondre une classification des fonctions uniformes.

Pour les ensembles *fermés* (et ce sont les seuls qui se présentent dans l'étude des singularités des fonctions uniformes), MM. Cantor (*M. A.*, t. XXIII, p. 471) et Bendixson (*A. M.*, t. II, p. 426) ont démontré ce théorème :

Si un ensemble FERMÉ E *est dénombrable, un des ensembles* E^α *se réduit à zéro; si un ensemble* FERMÉ E *n'est pas dénombrable, un des ensembles* E^α *est parfait* ($E^\alpha = E^{\alpha+1}$), α *désignant un nombre de la première ou de la seconde classe.*

C'est sur cette proposition et sur la généralisation des considérations développées plus haut que repose la démonstration du théorème énoncé dans le texte.

(¹) *Cf.* Weierstrass, *Recherches sur les fonctions 2r fois périodiques de 2r variables* (*J. de Crelle*, t. 89; *Œuvres*, t. II, p. 125; traduction *B. D.*, 1882, p. 111); *Propositions relatives aux fonctions analytiques de plusieurs variables* (*Œuvres*, t. II, p. 135). Le second de ces Mémoires a été commenté par M. Dautheville, *A. E. N.*, 1885, S.

(²) Dès lors, une infinité *dénombrable* d'éléments suffit à déterminer une fonction analytique d'une ou de *plusieurs* variables, puisque dans les deux cas les coefficients de l'élément initial forment un ensemble dénombrable.

(³) Weierstrass, *Œuvres*, t. II, p. 155.

Soient $f(x_1, \ldots, x_p)$ la fonction considérée et $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p)$ son élément générateur [1]. Deux cas sont possibles :

1° *La série $\mathfrak{P}$ converge en tout point à distance finie, c'est-à-dire pour tout système de valeurs finies des arguments $x_1, \ldots, x_p$*. Alors, si l'on désigne par $\mathfrak{P}_a(x_1 - a_1, \ldots, x_p - a_p)$ un autre élément de la fonction f, ayant pour centre le point $(a_1, \ldots, a_p)$, la relation

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p) = \mathfrak{P}_a(x_1 - a_1, \ldots, x_p - a_p)$$

est satisfaite en tout point $(x_1, \ldots, x_p)$ à distance finie appartenant au domaine de convergence de la série $\mathfrak{P}_a$. Or cette égalité est impossible, si les nombres $a_1, \ldots, a_p$ n'ont pas tous à la fois des valeurs finies. Il s'ensuit que, dans le cas considéré, un point $(x_1, \ldots, x_p)$ est à l'intérieur ou sur la frontière de $\mathfrak{D}$ suivant qu'il est à distance finie ou à l'infini.

2° *La série $\mathfrak{P}$ cesse de converger en des points à distance finie*. Alors, parmi ces points, il y en a au moins un où la fonction n'est plus régulière (on s'en rend compte en raisonnant comme pour établir le théorème analogue relatif aux fonctions d'une variable) (p. 168), et par suite le domaine d'existence de la fonction f a ce point comme point frontière [2].

298. Théorème. — *Une série dont les éléments sont des fonctions de p variables, holomorphes dans un domaine multiple $\mathfrak{D}$ d'un seul tenant et continues sur sa frontière, définit une fonction holomorphe dans ce domaine, pourvu qu'elle converge uniformément dans ce domaine et sur sa frontière.*

En effet, considérons les cercles de convergence, relatifs à tous les éléments de cette série, qui ont pour centre un point arbitraire

---

[1] Nous supposons *à distance finie* le centre de l'élément initial, ce qui permet de le ramener à l'origine.

Le centre $(a_1, \ldots, a_p)$ d'un élément pourrait être tel que quelques-uns des nombres $a_1, \ldots, a_p$ fussent infinis : on conviendrait alors, comme pour les fonctions d'une variable, de remplacer chaque binome correspondant $(x - \infty)$ par x^{-1}.

[2] Ainsi, une fonction analytique a au moins une singularité sur les circonférences des cercles de convergence de chaque élément.

de $\mathfrak{D}$; donnons à $p-1$ variables, par exemple à $x_2, \ldots, x_p$, des valeurs fixes intérieures à la fois à tous ces cercles, et regardons la série comme dépendant de la $p^{\text{ième}}$ variable x_1. En vertu d'un théorème établi plus haut (p. 95), cette série représente alors une fonction holomorphe relativement à x_1, et par suite aussi, dans des conditions analogues, une fonction holomorphe de $x_2, \ldots,$ de x_p. Dès lors, puisque la série est bornée, elle définit une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des variables (¹).

Théorème. — *Deux fonctions analytiques de p variables, holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_p)$ et prenant les mêmes valeurs sur un ensemble infini $\delta(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ intérieur à $\mathfrak{D}$, coïncident dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.*

Ce théorème se ramène au cas particulier ($p=1$) démontré précédemment (Ire Partie, p. 213). En effet, soient

$$f_1(x_1, \ldots, x_p), \quad f_2(x_1, \ldots, x_p)$$

les fonctions considérées; désignons leur différence par

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p),$$

et donnons aux variables $x_2, \ldots, x_p$ des valeurs fixes $a_2, \ldots, a_p$, choisies arbitrairement dans les ensembles $\delta_2, \ldots, \delta_p$. La fonction d'*une* variable

$$\varphi(x_1, a_2, \ldots, a_p)$$

est holomorphe dans $\mathfrak{D}_1$; dès lors, puisqu'elle est nulle sur δ_1, elle est nulle dans $\mathfrak{D}_1$, quel que soit le point $(a_2, \ldots, a_p)$ choisi dans $(\delta_2, \ldots, \delta_p)$. Ainsi, la fonction

$$\varphi(x_1, a_2, \ldots, a_p)$$

est nulle sur l'ensemble $(\mathfrak{D}_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$.

(¹) Weierstrass est parvenu à ce résultat par des considérations empruntées uniquement à la théorie des séries (*voir* la référence, Ire Partie, p. 219, note).
On peut rapprocher de ce théorème les propositions de M. Osgood (*M. A.*, t. LII, p. 463 et t. LIII, p. 461) relatives aux fonctions analytiques définies par les conditions de Cauchy (*voir* p. 161).

De même, la fonction

$$\varphi(A_1, x_2, a_3, \ldots, a_p),$$

où $(A_1, a_3, \ldots, a_p)$ représente un point arbitraire, mais fixe, de l'ensemble $(\mathfrak{D}_1, \delta_3, \ldots, \delta_p)$, est nulle sur δ_2, et par suite est nulle dans $\mathfrak{D}_2$. Dès lors, d'après le raisonnement précédent, elle est nulle sur l'ensemble $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \delta_3, \ldots, \delta_p)$. De proche en proche, on montrerait de même que la fonction est nulle dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.

299. Le plus important des théorèmes de Weierstrass sur les fonctions de plusieurs variables concerne leur décomposition en facteurs.

Les fonctions entières d'*une seule* variable ont leurs zéros *isolés;* aussi il n'était pas impossible d'essayer de les représenter par le produit d'un nombre infini d'éléments *ayant chacun une seule racine*. Mais les systèmes de nombres qui annulent une fonction de *plusieurs* variables forment une *suite continue* (n° 301); dès lors, il n'y avait pas à chercher à étendre à ces fonctions, sans des modifications profondes, le beau théorème relatif à leur décomposition en facteurs primaires. Ce à quoi Weierstrass est parvenu, c'est à remplacer une fonction holomorphe qui s'annule en un point par le produit de deux autres dont l'une n'a plus de zéro en ce point; par là, il met en évidence ce qu'on peut appeler la partie de la fonction donnée qui s'annule au point considéré [1].

D'une manière plus précise, soit $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p)$ une série entière, convergente dans des cercles $C_1, \ldots. C_p$ ayant l'origine pour centre et nulle à l'origine sans que $\mathfrak{P}(x_1, 0, \ldots, 0)$ soit identiquement nulle [2]; on peut *déterminer* des cercles $c_1, \ldots, c_p$ concen-

---

(1) *Œuvres*, t. II, p. 135. — En publiant ce théorème (1879 et 1886), Weierstrass a rappelé qu'à plusieurs reprises, depuis 1860, il l'avait enseigné dans ses Leçons à l'Université de Berlin.

(2) Cette hypothèse peut toujours être faite, car le cas où $\mathfrak{P}(x_1, 0, \ldots, 0)$ s'annule pour toute valeur de x_1 se ramène par un changement linéaire de variables à celui du texte. En effet, posons

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p) = \pi_\mu(x_1, \ldots, x_p) + \pi_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_p) + \ldots,$$

$\pi_\mu, \pi_{\mu+1}, \ldots$ désignant l'ensemble des termes de la série $\mathfrak{P}$ dont les degrés sont

triques aux cercles $C_1, \ldots, C_p$ et de rayons moindres, tels que l'on ait dans ces cercles

$$(\mathrm{W}) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p) \\ \quad = \mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_p)\,[x_1^n + p_1(x_2, \ldots, x_p)x_1^{n-1} + \ldots + p_n(x_2, \ldots, x_n)] : \end{cases}$$

le premier facteur $\mathfrak{P}_1$ est une série entière qui converge dans les cercles $c_1, \ldots, c_p$ et *ne s'annule plus* à leur intérieur; le second facteur est un polynome entier en x_1, ayant pour coefficients p_i des séries entières convergentes dans le domaine $(c_2, \ldots, c_p)$ et nulles à l'origine [1], son degré est égal au plus faible exposant de x_1 dans la série

$$\mathfrak{P}(x_1, 0, \ldots, 0).$$

Nous démontrerons ici cette proposition en supposant $p = 2$, et nous suivrons la méthode indiquée par M. Simart [2].

Développons la fonction donnée $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, holomorphe à l'origine et nulle en ce point, suivant les puissances de x_1. Nous avons vu que si le développement de $\mathfrak{P}(x_1, 0)$ en série entière commence par un terme de degré p en x_1, on peut déterminer deux cercles c_1 et c_2, ayant pour centre l'origine, tels qu'à tout point x_2 intérieur à c_2 correspondent p racines x_1 de l'équation $\mathfrak{P}(x_1, x_2) = 0$, intérieures au cercle c_1 (p. 6).

Prenons un point fixe x_2 dans le cercle c_2, et un point variable ξ dans le cercle c_1; puis évaluons de deux manières l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{1}{\mathfrak{P}(x_1, x_2)} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{x_1 - \xi}.$$

---

respectivement $\mu, \mu+1, \ldots$, et faisons une substitution linéaire

$$x_i = c_{i1}t_1 + \ldots + c_{ip}t_p \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

telle que ni son déterminant ni la fonction $\pi_\mu(c_{11}, \ldots, c_{p1})$ ne soient nuls. Elle transforme la fonction $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p)$ en une fonction $\mathfrak{R}(t_1, \ldots, t_p)$ telle que $\mathfrak{R}(t_1, 0, \ldots, 0)$ n'est pas nulle identiquement avec t_1, puisque l'on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(t_1, 0, \ldots, 0) &= \mathfrak{P}(c_{11}t_1, \ldots, c_{p1}t_p) \\ &= \pi_\mu(c_{11}, \ldots, c_{p1})t_1^\mu + \pi_{\mu+1}(c_{11}, \ldots, c_{p1})t_1^{\mu+1} + \ldots. \end{aligned}$$

On voit de plus que le plus faible exposant de t_1 dans $\mathfrak{R}(t_1, 0, \ldots, 0)$ est égal au degré μ de l'ensemble des termes de degré le moins élevé dans $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p)$.

[1] Pour abréger, nous n'établirons pas les égalités $p_i(0, \ldots, 0) = 0$, dont l'importance n'est que secondaire.

[2] *Cf.* PICARD, *Analyse*, t. II, p. 243. — Comme de coutume, Weierstrass ne fait pas appel dans sa démonstration aux intégrales de Cauchy.

Elle peut d'abord être calculée par le théorème des résidus. Pour y parvenir, on remarque que la fonction sous le signe d'intégration est uniforme; dans le cercle c_1, ses pôles sont les zéros $\xi_1, \ldots, \xi_p$ de la fonction $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ qui correspondent à la valeur fixe x_2, et de plus le nombre ξ. Les résidus relatifs à ces pôles simples sont respectivement (p. 136)

$$\frac{1}{\xi_1-\xi}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\xi_p-\xi}, \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x_1}\right)_{x_1=\xi};$$

la valeur de l'intégrale (1) est donc

$$\frac{1}{\xi_1-\xi}+\ldots+\frac{1}{\xi_p-\xi}+\left(\frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x_1}\right)_{x_1=\xi}.$$

On en obtient une seconde expression en partant de l'identité

$$\frac{1}{x_1-\xi}=\frac{1}{x_1}+\frac{\xi}{x_1^2}+\ldots+\frac{\xi^n}{x_1^{n+1}}+\ldots \qquad (|\xi|<|x_1|).$$

Cette série converge uniformément sur la circonférence c_1, pour tous les points ξ intérieurs à cette circonférence; l'uniformité de la convergence subsiste lorsqu'on en multiplie les éléments par le facteur borné $\frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x_1}$: on peut donc l'intégrer terme par terme. De là, comme seconde expression de l'intégrale (1), une série entière en ξ, dont le terme de rang $n+1$ a pour coefficient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{x_1^{n+1}}.$$

Cette fonction de x_2 est bien déterminée, continue et monogène, par suite holomorphe dans le cercle c_2; représentons-la par $\varphi_n(x_2)$, puis égalons les deux expressions de l'intégrale (1) et remplaçons désormais ξ par x_1. On a ainsi

$$\frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x_1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{x_1-\xi_i}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x_2)x_1^n.$$

La série du second membre est holomorphe dans le champ (c_1, c_2); représentons-la par $\mathfrak{R}(x_1, x_2)$, et appelons $\mathrm{P}(x_1, x_2)$ le produit

$$(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_p);$$

il vient

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_1} - \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_1} = \mathfrak{R}(x_1, x_2).$$

Je dis que les coefficients des puissances de x_1 dans le polynome $P(x_1, x_2)$ sont des fonctions de x_2 holomorphes dans c_2. En effet, ce sont des fonctions entières symétriques des racines ξ_i, ou encore des fonctions entières de sommes des puissances semblables de ces racines. Or de pareilles sommes sont des fonctions de x_2 holomorphes dans c_2, comme on le constate en évaluant de deux manières l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} x_1^k \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{\mathfrak{P}} \qquad (k \text{ est un entier arbitraire});$$

car cette intégrale est par sa nature une fonction holomorphe de x_2, et d'autre part, le théorème des résidus permet de la représenter par $\xi_1^k + \ldots + \xi_p^k$.

Revenons à l'égalité (2). Multiplions-en les deux membres par dx_1, et regardons-les comme des dérivées logarithmiques. L'intégration donne

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mathfrak{P}(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)} = C e^{\int \mathfrak{R}(x_1, x_2)\, dx_1},$$

C représentant une constante par rapport à x_1, c'est-à-dire une fonction de x_2 que l'on déterminera en donnant à x_1 une position particulière x_1^0 sur la circonférence c_1. $\mathfrak{P}(x_1^0, x_2)$ et $P(x_1^0, x_2)$ ne s'annulent pas quand x_2 est dans le cercle c_2; on a donc, en désignant par $\mathfrak{P}_1(x_1, x_2)$ une fonction holomorphe dans les cercles (c_1, c_2), toujours différente de zéro dans ces cercles,

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \mathfrak{P}_1(x_1, x_2)\, P(x_1, x_2).$$

Ainsi, dans le domaine (c_1, c_2) la série donnée est décomposée en un produit de facteurs : le premier facteur ne s'annule plus dans ce domaine; le second facteur est un polynome en x_1 dont le degré est égal au plus faible exposant de x_1 dans $\mathfrak{P}(x_1, 0)$; son premier coefficient est l'unité, les autres sont des fonctions holomorphes de x_2 (nulles avec x_2).

300. Cette proposition de Weierstrass a de nombreux corollaires.

D'abord elle permet d'établir, dans des cas plus généraux que ceux étudiés précédemment (p. 8), *l'existence de la fonction implicite* x_1 des variables $x_2, \ldots, x_p$, définie par la relation

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

dont le premier membre, nul à l'origine, est holomorphe dans le domaine formé par p cercles $C_1, \ldots, C_p$ ayant l'origine pour centre. En effet, donnons-nous arbitrairement dans $p - 1$ cercles $c_2, \ldots, c_p$ concentriques aux cercles $C_2, \ldots, C_p$, dont on a déterminé convenablement les rayons, les valeurs de $x_2, \ldots, x_p$; *les valeurs de la* $p^{\text{ième}}$ *variable* x_1, intérieures à un cercle déterminé c_1 décrit de l'origine, *qu'il faut leur adjoindre pour obtenir un zéro de la fonction* $\mathfrak{P}$, *sont fournies par l'équation algébrique*

$$(p) \qquad x_1^n + p_1(x_2, \ldots, x_p)x_1^{n-1} + \ldots + p_n(x_2, \ldots, x_p) = 0.$$

En particulier, soit $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ une série entière convergente, nulle à l'origine, et telle que $\mathfrak{P}'_{x_1}$ soit différente de zéro en ce point. Alors $n = 1$, et l'on a pour les valeurs de x_1 et de x_2 dont le module ne dépasse pas un nombre fixe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \mathfrak{P}_1(x_1, x_2)[x_1 + p(x_2)]:$$

la série entière $\mathfrak{P}_1(x_1, x_2)$ ne s'annule plus à l'origine, la série entière $p(x_2)$ s'annule à l'origine. Ce résultat avait déjà été obtenu (p. 8).

301. On en déduit aussi qu'il est impossible de déterminer autour de l'origine un domaine tel que la série entière $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p)$, nulle à l'origine, *n'y ait qu'un nombre limité de zéros.*

En effet, supposons que l'une au moins des fonctions

$$\begin{array}{l} \mathfrak{P}(x_1, 0, \ldots, 0), \\ \mathfrak{P}(0, x_2, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{P}(0, \ldots, 0, x_p), \end{array}$$

la première par exemple, ne soit pas nulle pour toute valeur de $x_1, \ldots,$ de x_p, ce qui revient à dire que certains termes de

la série $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_p)$ ne contiennent pas à la fois toutes les variables ([1]).

On peut alors déterminer les cercles $c_1, \ldots, c_p$ de telle sorte qu'à leur intérieur l'égalité (W) soit satisfaite. En tout point $(x_2, \ldots, x_p)$ des cercles $c_2, \ldots, c_p$, il y a n valeurs de x_1 intérieures à c_1 qui annulent le polynome (p) et dès lors la série $\mathfrak{P}$; par suite, dans tout domaine avoisinant l'origine, il y a une infinité de systèmes de valeurs des variables pour lesquelles $\mathfrak{P}$ s'annule.

Pour préciser ce résultat, traçons dans les plans respectifs des variables $x_2, \ldots, x_p$ des courbes arbitraires partant de l'origine, et supposons que ces variables se déplacent d'un mouvement continu sur ces courbes. Les coefficients p_i du polynome (p) varieront eux-mêmes d'une manière continue, ainsi que les n racines x_1 de l'équation correspondante. Donc les points qui représentent ces racines se déplacent eux-mêmes d'un mouvement continu sur une courbe déterminée qui part de l'origine ([2]).

302. Un autre corollaire important du théorème de Weierstrass est relatif à la *divisibilité* des séries entières.

Soient $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_p)$ et $\mathfrak{P}_2(x_1, \ldots, x_p)$ deux séries entières, convergentes dans le voisinage de l'origine : on dit que *la série* $\mathfrak{P}_1$ *est divisible par la série* $\mathfrak{P}_2$ *lorsque l'on peut trouver une série* $\mathfrak{P}_3$, *elle aussi convergente dans le voisinage de l'origine, telle que l'on ait dans ce voisinage*

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_p) = \mathfrak{P}_2(x_1, \ldots, x_p)\,\mathfrak{P}_3(x_1, \ldots, x_p).$$

Cela posé, quand la série $\mathfrak{P}_2$ ne s'annule pas à l'origine, le quotient $\mathfrak{P}_1 : \mathfrak{P}_2$ est holomorphe à l'origine, et par suite développable en série entière; la série $\mathfrak{P}_1$ est alors toujours divisible par la série $\mathfrak{P}_2$.

---

(1) Si cette hypothèse n'était pas réalisée, on ferait la substitution

$$(x_i,\ c_{i1}x_1 + \ldots + c_{ip}x_p)$$

indiquée plus haut; puis, le théorème une fois établi pour la fonction transformée, on le démontrerait aisément pour la fonction proposée.

(2) On peut dire que les zéros d'une série entière à p variables forment une multiplicité à $2(p-1)$ paramètres réels.

Quand la série $\mathfrak{P}_2$ s'annule à l'origine sans que $\mathfrak{P}_1(0, \ldots, 0)$ soit aussi nulle, le rapport $\mathfrak{P}_1 : \mathfrak{P}_2$ est infini à l'origine; par suite, il n'est pas holomorphe en ce point.

Il y a donc lieu de discuter la question de divisibilité seulement lorsque les expressions $\mathfrak{P}_1(0, \ldots, 0)$ et $\mathfrak{P}_2(0, \ldots, 0)$ sont *toutes deux nulles*. Étudions ce cas.

Dans les séries $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, faisons une substitution du type

$$x_i = c_{i1}t_1 + c_{i2}t_2 + \ldots + c_{ip}t_p \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

de module différent de zéro, telle que si l'on désigne par $\mathfrak{R}_1(t_1, \ldots, t_p)$ et $\mathfrak{R}_2(t_1, \ldots, t_p)$ les fonctions transformées des fonctions $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, aucune des deux séries $\mathfrak{R}_1(t_1, 0, \ldots, 0)$, et $\mathfrak{R}_2(t_1, 0, \ldots, 0)$ ne soit nulle identiquement (ce qui est toujours possible, p. 212). En vertu du théorème de Weierstrass, on peut alors trouver deux séries $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ entières par rapport aux variables $t_1, \ldots, t_p$, et ne s'annulant pas dans le voisinage du point $t_1 = \ldots = t_p = 0$, telles que l'on ait

$$\mathfrak{R}_1(t_1, \ldots, t_p) = \mathcal{S}_1(t_1, \ldots, t_p)\mathrm{R}_1 \qquad (\mathrm{R}_1 = t_1^{\mu} + r_1 t_1^{\mu-1} + \ldots + r_{\mu}),$$
$$\mathfrak{R}_2(t_1, \ldots, t_p) = \mathcal{S}_2(t_1, \ldots, t_p)\mathrm{R}_2 \qquad (\mathrm{R}_2 = t_1^{\nu} + \rho_1 t_1^{\nu-1} + \ldots + \rho_{\nu});$$

R_1 et R_2 sont des polynomes entiers en t_1, ayant pour coefficients r_i et ρ_k des séries entières en $t_2, \ldots, t_p$ nulles à l'origine.

Pour que la série $\mathfrak{P}_1$ soit divisible par la série $\mathfrak{P}_2$, il faut et il suffit que la série $\mathfrak{R}_1$ soit divisible par la série $\mathfrak{R}_2$, ou encore que le module du quotient de $\mathcal{S}_1\mathrm{R}_1$ par $\mathcal{S}_2\mathrm{R}_2$ soit fini à l'origine et dans son voisinage. Or, dans ce voisinage, le module de $\mathcal{S}_1 : \mathcal{S}_2$ ne s'annule pas; donc, il faut et il suffit que le module de $\mathrm{R}_1 : \mathrm{R}_2$ reste aussi fini, et par suite que R_1 soit divisible par R_2 (¹).

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante *pour que la série* $\mathfrak{P}_1$ *soit divisible par la série* $\mathfrak{P}_2$, c'est que le *polynome* R_1 soit *divi-*

(¹) Weierstrass, fidèle à ses méthodes, entre dans tous les détails nécessaires pour rendre parfaitement rigoureux ce raisonnement dont nous ne donnons ici que l'esquisse : en particulier, il fixe l'étendue des domaines avoisinant le point $t_1 = \ldots = t_p = 0$, dans lesquels on est certain de la convergence des développements considérés (WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 142. — DAUTHEVILLE, *A. E. N.*, 1885, S., p. 26).

sible, au sens ordinaire du mot, par le *polynome* R_2, quelles que soient les valeurs de $t_2, \ldots, t_p$ [1].

Weierstrass a étendu ces recherches. Il regarde deux séries entières, nulles à l'origine, comme ayant un *diviseur commun* en ce point, lorsqu'elles sont toutes deux divisibles par une même série entière nulle à l'origine [2]. Cette définition posée, il a obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux séries de puissances, nulles en un point, aient un diviseur commun en ce point, et il a appris à substituer au quotient de pareilles séries un quotient *irréductible* au point considéré, c'est-à-dire le rapport de nouvelles séries sans diviseur commun en ce point [3].

303. Cette théorie de la divisibilité des séries entières a encore permis à Weierstrass de *classifier les singularités des fonctions analytiques* uniformes.

Désignons par $f(x_1, \ldots, x_p)$ une pareille fonction, et par

---

[1] En d'autres termes, la division de R_1 par R_2 donne en général comme reste un polynome en t_1, ayant pour coefficients des séries entières en $t_2, \ldots, t_p$: pour que $\mathfrak{P}_1$ soit divisible par $\mathfrak{P}_2$, il faut et il suffit que ces séries en $t_2, \ldots, t_p$ aient tous leurs coefficients nuls.

Il résulte de ce théorème qu'*une série entière* $\mathfrak{P}$ nulle à l'origine *est divisible par une infinité de séries entières* nulles à l'origine.

En effet, remplaçons, comme dans le texte, la série $\mathfrak{P}$ successivement par la série $\mathcal{R}$ et le produit $\mathcal{S}R$; désignons par R' un diviseur quelconque de R, et par $\mathcal{S}'$ une série entière arbitraire différente de zéro à l'origine. Le produit $\mathcal{S}'R'$ est une série entière qui divise $\mathcal{R}$, quelle que soit la série $\mathcal{S}'$; on a donc une infinité de séries entières diviseurs de la série $\mathcal{R}$, et dès lors (en revenant aux variables x_i) diviseurs de la série $\mathfrak{P}$.

[2] D'après les mêmes principes, on a pu définir *le plus grand* commun diviseur et le plus petit multiple commun de deux séries (ou de plusieurs séries).

Les zéros communs à deux séries entières à p variables nulles à l'origine forment, dans le voisinage de l'origine, une multiplicité à $2(p-1)$ ou $2(p-2)$ paramètres réels suivant qu'elles ont un diviseur commun ou n'ont pas de diviseur commun. Dans ce dernier cas, si le nombre des variables est *deux,* l'origine est un zéro commun isolé.

[3] WEIERSTRASS, *Œuvres,* t. II, p. 151.

De même, on dit que le quotient de deux fonctions analytiques dans un domaine $\mathfrak{D}$ est *irréductible en un point* où les fonctions sont régulières, lorsque le quotient des deux séries de puissances relatives à ce point est irréductible en ce point. Le quotient des deux fonctions est *irréductible dans le domaine* $\mathfrak{D}$, quand il est irréductible en tout point intérieur à $\mathfrak{D}$.

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ une de ses singularités. Elle est dite *non essentielle* quand il existe une série de puissances $\mathfrak{P}_1(x_1-\alpha_1, \ldots, x_p-\alpha_p)$, nulle en ce point, telle que le produit de cette série par la fonction f soit holomorphe en ce point. Dans le cas contraire, la singularité est dite *essentielle*.

Ainsi, dans le voisinage de tout point singulier non essentiel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, on a

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{\mathfrak{P}_2(x_1-\alpha_1, \ldots, x_p-\alpha_p)}{\mathfrak{P}_1(x_1-\alpha_1, \ldots, x_p-\alpha_p)},$$

chacune des fonctions $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ étant régulière en ce point, et la fonction $\mathfrak{P}_1$ s'annulant en ce point.

Pour les fonctions d'*une* variable, les points singuliers non essentiels sont, avons-nous dit, des *pôles;* dans le cas des fonctions de *plusieurs* variables, ces points peuvent être répartis en *deux catégories :* voici d'après quels principes. Déterminons les séries $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ de façon qu'elles n'aient *pas de diviseur commun* au point singulier considéré $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.

1° Si la série $\mathfrak{P}_2$ ne s'annule pas en ce point, on peut définir un domaine avoisinant ce point tel que la fonction f dépasse dans ce domaine tout nombre donné.

2° Si la série $\mathfrak{P}_2$ s'annule aussi en ce point, il y a dans le voisinage de ce zéro commun aux séries $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, si petits que soient les rayons des cercles qui le déterminent, des points où la fonction f devient infinie et des points où elle prend telle valeur que l'on veut.

En effet, substituons comme ci-dessus aux variables $x_1-\alpha_1, \ldots, x_p-\alpha_p$, les variables $t_1, \ldots, t_p$, qui en dépendent linéairement : on peut remplacer, dans des domaines déterminés avoisinant le point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, les séries $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ respectivement par les produits

$$\mathfrak{R}_1(t_1, \ldots, t_p)\,\mathrm{R}_1(t_1, \ldots, t_p), \quad \mathfrak{R}_2(t_1, \ldots, t_p)\,\mathrm{R}_2(t_1, \ldots, t_p);$$

$\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ désignent des séries entières qui ne s'annulent pas à l'origine, R_1 et R_2 sont des polynomes en t_1, ayant pour coefficients des séries entières en $t_2, \ldots, t_p$, et n'ayant pas de diviseur commun au point $t_1 = \ldots = t_p = 0$.

Il y a une infinité de systèmes de points $(t_1, \ldots, t_p)$ voisins de

l'origine pour lesquels R_1 s'annule tandis que R_2 est différent de zéro : donc, il y a une infinité de points $(x_1, \ldots, x_p)$ voisins de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ pour lesquels $\mathfrak{P}_1$ est nul, sans que $\mathfrak{P}_2$ soit nul ; par suite, la fonction f dépasse tout nombre donné en une infinité de points voisins de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.

Mais, d'autre part, dans le voisinage de ce même point, les fonctions $f(x_1, \ldots, x_p)$ et $[f(x_1, \ldots, x_p) - k]^{-1}$ ont la même forme, quelle que soit la constante k, d'après la définition de point singulier non essentiel appliquée à la fonction f. Donc, il y a une infinité de points de ce voisinage où la fonction $(f - k)^{-1}$ est infinie, et, par suite, où la fonction f prend telle valeur k que l'on veut.

Ainsi, on peut distinguer deux types de points non essentiels, suivant que, dans leur voisinage, la fonction reste *infinie* ou est *indéterminée* (¹).

304. Par *fonction entière* de plusieurs variables, on entend une fonction analytique sans singularité à distance finie.

En tout point à distance finie, une pareille fonction est représentable par une série de puissances, convergente dans tout domaine borné. Réciproquement, une série de puissances qui converge pour tout système de valeurs finies des variables définit une fonction sans singularité à distance finie : c'est une fonction entière.

Une fonction entière est *rationnelle* ou *transcendante* suivant que son développement a un nombre limité ou illimité de termes : dans le premier cas, c'est un polynome.

Elle cesse d'être régulière lorsque les modules d'une ou plusieurs variables deviennent infinis. De pareils points peuvent être des singularités essentielles ou non essentielles pour la fonction entière.

(¹) M. Autonne discute l'indétermination des fonctions dans le voisinage des points non essentiels par une méthode un peu différente de celle de Weierstrass : elle revient à généraliser les procédés employés, dans le cas d'une variable, pour obtenir les vraies valeurs des expressions indéterminées (*A. M.*, t. XXI, p. 249).

Un polynome entier $P(x_1, \ldots, x_p)$ *n'a pas de singularité essentielle.*

En effet, il suffit de prouver qu'il n'en a pas à l'infini, c'est-à-dire dans le voisinage d'un point tel que le point

$$(\infty_1, \ldots, \infty_q, a_{q+1}, \ldots, a_p).$$

Posons $x_1 = \xi_1^{-1}, \ldots, x_q = \xi_q^{-1}$: le domaine $\mathcal{D}$ à étudier sera dès lors formé de p cercles ayant pour centre le point

$$(0_1, \ldots, 0_q, a_{q+1}, \ldots, a_p)$$

et pour rayons des nombres R^{-1} et ρ aussi petits que l'on veut. Désignons par $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les degrés du polynome $P(x_1, \ldots, x_p)$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_p$, et considérons le produit $x_1^{-\mu_1} \ldots x_q^{-\mu_q} P(x_1, \ldots, x_p)$. La substitution ci-dessus le transforme en un polynome *entier* par rapport à $\xi_1, \ldots, \xi_q$, $x_{q+1}, \ldots, x_p$, ou encore par rapport à $\xi_1, \ldots, \xi_q, x_{q+1} - a_{q+1}, \ldots, x_p - a_p$.

On a donc, en désignant par Q un polynome convenable

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_q^{\mu_q} P\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{1}{\xi_q}, x_{q+1}, \ldots, x_p\right) \\ \quad = Q(\xi_1, \ldots, \xi_q, x_{q+1} - a_{q+1}, \ldots, x_p - a_p); \end{array} \right.$$

par suite, dans le domaine $\mathcal{D}$, le polynome P est bien le quotient de deux polynomes, dont l'un (le dénominateur) s'annule au point $(0_1, \ldots, 0_q, a_{q+1}, \ldots, a_q)$: ce point est une *singularité non essentielle.*

Elle peut du reste appartenir à l'un ou à l'autre des deux types définis.

En effet, si le polynome P a un terme en $\xi_1^{-\mu_1} \ldots \xi_q^{-\mu_q}$, le premier membre de l'égalité (4), et par suite le polynome Q n'est pas nul au point que nous étudions; alors le polynome P est *infini* en ce point.

Dans le cas contraire, le polynome Q s'annule au point considéré; on peut trouver au moins un point appartenant au domaine $\mathcal{D}$, tel que le polynome P y prenne une *valeur choisie arbitrairement.*

305. Une fonction analytique uniforme de plusieurs variables est dite *méromorphe* ou rationnelle lorsqu'elle n'a *à distance finie que des singularités non essentielles.*

Le quotient de deux fonctions entières est une fonction méromorphe [1].

Réciproquement, une fonction méromorphe peut être représentée par le quotient de deux fonctions entières [2].

Les fonctions méromorphes les plus simples sont les *fractions rationnelles;* elles sont définies par le quotient de deux polynomes.

Les fractions rationnelles n'ont dans tout domaine borné, *et même à l'infini,* que des singularités *non essentielles :* ces singularités non essentielles, à distance finie comme à l'infini, peuvent appartenir à l'un ou l'autre des deux types signalés [3].

Réciproquement, une fonction analytique uniforme qui n'a de singularité *essentielle* ni à distance finie, *ni à distance infinie,* est une fraction rationnelle [4].

Nous verrons plus tard que les fonctions méromorphes de p variables, $2p$ fois périodiques, s'expriment rationnellement au moyen des fonctions θ à plusieurs arguments (Ire Partie, p. 247).

---

(1) Pour la démonstration, *cf.* WEIERSTRASS, *Œuvres,* t. II, p. 160. — DAUTHEVILLE, *A. E. N.,* 1885, p. 42.

(2) Ce théorème, énoncé par Weierstrass (*Œuvres,* t. II, p. 163), a été établi par M. Poincaré pour le cas de deux variables (*A. M.,* t. II, p. 97; sa démonstration repose sur l'extension à l'hyperespace du principe de Dirichlet) puis par M. Cousin (*A. M.,* t. XIX, p. 38) qui a précisé et généralisé les résultats obtenus par M. Poincaré. Ainsi, il a prouvé que si la fonction n'a, dans un domaine formé par p cercles de rayons finis ou infinis ayant les origines pour centres, que des singularités non essentielles, elle peut être représentée dans ces cercles par le quotient de deux séries entières. *Cf.* aussi APPELL, *J. M.,* 1891, p. 181.

Remarquons enfin qu'à une représentation du type énoncé on en peut substituer une infinité d'autres; il n'y a qu'à multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient considéré par une même fonction entière n'ayant pas de zéro.

Les fonctions entières dont il est parlé dans l'énoncé peuvent être rationnelles ou transcendantes.

(3) *Cf.* DAUTHEVILLE, *A. E. N.,* 1885, p. 40.

(4) *Cf.* HURWITZ, *J. de Crelle,* t. 95, p. 201. — DAUTHEVILLE, *A. E. N.,* 1885, p. 53 (la proposition a été démontrée plus haut pour les fonctions d'une variable, p. 193; ces auteurs prouvent que, si elle est vraie pour $p-1$ variables, elle est vraie pour p variables). — H. LAURENT, *Analyse,* t. IV, p. 13.

Quant au problème de la représentation des fonctions uniformes de p variables dont les *singularités* sont *quelconques,* M. Cousin est parvenu à le résoudre dans des cas assez généraux, en faisant l'extension des méthodes employées par M. Mittag-Leffler pour les fonctions d'une variable (1).

(1) *A. M.,* t. XIX, p. 56.

CHAPITRE X.

THÉORIE DES FONCTIONS AU POINT DE VUE DE RIEMANN.

306. De toutes les découvertes de Riemann on regarde comme la plus éclatante la résolution du problème de l'inversion des intégrales de différentielles algébriques, obtenue à l'aide de fonctions entières à un nombre quelconque d'arguments (Ire Partie, p. 247). Elle couronnait ses recherches sur les fonctions algébriques, dont il avait pénétré si intimement la nature, grâce à la conception des surfaces formées de plans multiples superposés, à l'introduction des notions de genre et de classe, etc.

Mais son influence, « sans rivale dans le développement des Mathématiques modernes », s'est fait sentir dans bien d'autres domaines : il faut regarder comme fondamentaux ses Mémoires sur les *surfaces minima passant par un contour donné,* sur la *série hypergéométrique de Gauss,* sur la Théorie des nombres, etc. On sait aussi avec quelle vigueur il a essayé de scruter les *Principes de l'Analyse infinitésimale* et les *Hypothèses servant de base à la Géométrie* (1).

Ici, c'est de l'orientation qu'il a donnée à la théorie des fonctions analytiques que nous avons à parler.

On répartit souvent les mathématiciens en deux classes, que l'on appelle volontiers les *Analystes* et les *Géomètres,* ou encore les logiciens et les intuitifs, non pas d'après l'*objet* de leurs travaux, mais suivant la tendance de leur esprit et la nature des méthodes qu'ils emploient (2). Weierstrass et Riemann caracté-

(1) *Voir,* dans la traduction qu'a donnée M. Laugel des *Œuvres de Riemann,* la préface d'Hermite et la conférence de M. Klein.

(2) *Cf.* Poincaré, *Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques.* Conférence faite au deuxième Congrès des Mathématiciens, 1900.

risent assez nettement ces deux types : l'examen des méthodes qu'ils ont adoptées pour l'étude des fonctions le montre avec évidence ([1]).

Pour développer les idées de Cauchy, Weierstrass, esprit déductif et ami de la rigueur, devait s'attacher aux conceptions *arithmétiques :* il allait donner à la fonction analytique, comme élément générateur, la série de puissances; une chaîne de séries permettrait ensuite de définir et de représenter cette fonction; des transformations analytiques conduiraient à l'étude de leurs propriétés. L'Analyse deviendrait en ses mains comme un prolongement de l'Arithmétique.

Continuateur lui aussi de Cauchy, Riemann s'était placé à un point de vue tout différent de celui de Weierstrass. Habitué dans ses méditations à recourir à l'intuition physique ou géométrique (dans beaucoup de travaux, ses méthodes sont caractérisées par leur liaison avec les conceptions fondamentales de la Physique et de la Géométrie), il part d'une notion empruntée à la Physique ([2]),

---

([1]) Il est pourtant bon de rappeler (*voir* aussi n° 273) le cas que Weierstrass faisait de l'intuition, entendue dans un certain sens, comme moyen de découverte. Voici ce qu'il écrivait à Mme S. de Kowalevski, le 27 août 1883 :

« A cela s'ajoute (chez Kronecker) une imperfection qu'on rencontre chez beaucoup d'hommes extrêmement intelligents...; il n'a pas assez de *fantaisie* (je devrais plutôt dire d'*intuition*), et il est certain qu'*un mathématicien qui n'est pas un peu poète ne sera jamais un mathématicien complet*. Les comparaisons sont instructives; les vues d'ensemble embrassant tout et dirigées vers les sommets les plus élevés, vers l'idéal, placent d'une manière éclatante Abel avant Jacobi, de même Riemann avant ses contemporains (Eisenstein, Rosenhain), et Helmholtz avant Kirchhoff.... »

Cf. MITTAG-LEFFLER, Conférence faite au deuxième Congrès des Mathématiciens, 1900.

([2]) Nous avons déjà vu (p. 54) que, pour certains problèmes mathématiques, la Physique a fourni non seulement des solutions, mais dans une certaine mesure des raisonnements. En voici un autre exemple intéressant (n° 332) :

« M. Klein... étudie une des questions les plus abstraites de la Théorie des fonctions; il s'agit de savoir si, sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données : par exemple, deux points singuliers logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire. Que fait le célèbre géomètre allemand? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met les deux points logarithmiques en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué

celle de *fonction harmonique* ou de *potentiel*. Il découvre son vrai sens mathématique, au point de vue de la Théorie des fonctions, en montrant que par l'adjonction d'une fonction harmonique complémentaire on obtient une fonction analytique. De là, les équations aux dérivées partielles de Cauchy-Riemann qui caractérisent ces fonctions et permettent, quand une fonction harmonique est définie dans un domaine à connexion simple, de déterminer la fonction complémentaire (Ire Partie, p. 51) et, par suite, de former une fonction analytique.

L'*image géométrique* conduisait Riemann aux mêmes résultats, car la représentation conforme de deux domaines simplement connexes l'un sur l'autre revient aussi à la définition d'une fonction analytique; réciproquement, la Théorie des fonctions analytiques conduit à l'étude des lois de transformations des surfaces (voir *infra*, § III). De même dans plusieurs de ses autres travaux, « Riemann appelle tout de suite la Géométrie à son secours, chacune de ses conceptions est une image que nul ne peut oublier dès qu'il en a compris le sens (1) ».

---

sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé.

» Sans doute, M. Klein sait bien qu'il n'a donné là qu'un aperçu : toujours est-il qu'il n'a pas hésité à le publier, et il croyait probablement y trouver, sinon une démonstration rigoureuse, du moins je ne sais quelle certitude morale. Un logicien aurait rejeté avec horreur une semblable conception, ou, plutôt, il n'aurait pas eu à la rejeter, car dans son esprit elle n'aurait jamais pu naître. » (POINCARÉ, *loc. cit.*, p. 116.) *Cf.* KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen*. Leipzig, 1882.

Réciproquement, les méthodes que Riemann avait déduites de l'intuition physique pour les appliquer aux Mathématiques jouent désormais un rôle important dans l'étude de la Physique mathématique. Prenons comme exemple le problème de Lagrange ou de Plateau, qui consiste à déterminer la surface minima, continue ou assujettie à des discontinuités de nature connue, passant par un contour fermé, ou encore, en langage physique, la figure d'équilibre d'une lame fluide qui est encadrée par un contour donné. Plateau l'a résolu expérimentalement en plongeant le contour donné, réalisé physiquement, dans une dissolution de liquide glycérique : Riemann en a donné une solution analytique dans le cas où le contour est formé de certaines courbes simples; elle a été publiée en 1867 (*Œuvres*, trad. Laugel, p. 384), presque en même temps que les recherches parallèles de Weierstrass sur le même sujet (n° 330), puis développée et généralisée par M. Schwarz (*cf.* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Ire Partie, p. 424; NIEWENGLOWSKI, *A. E. N.*, 1880, p. 227).

(1) POINCARÉ, *loc. cit.*, p. 117.

Au dire de Dirichlet dans son *Éloge de Jacobi,* la tendance de l'Analyse moderne est de remplacer les calculs par des idées ([1]). Dans ses recherches, Riemann se montrait bien fidèle à cette tendance; car il donnait une définition de la fonction qui, *au lieu de dépendre de son expression analytique pour chaque valeur de l'argument, résultait de ses propriétés* ([2]). « Les méthodes employées jusqu'ici pour l'étude de ces fonctions supposent toujours que, par définition, on part d'une *expression* de la fonction, qui permet d'en avoir la valeur pour chaque valeur de l'argument. Nos recherches ont montré qu'une des conséquences de la notion générale de fonction de variable complexe est que l'on peut séparer en deux parties les éléments qui la déterminent; une de ces parties résulte de l'autre : de fait, nous avons ramené l'ensemble des éléments servant à représenter la fonction à ceux dont on peut faire un choix arbitraire. Cette remarque apporte une simplification fondamentale à l'étude des questions. Ainsi, pour démontrer l'égalité de deux expressions de la même fonction, on devait autrefois les transformer l'une dans l'autre, c'est-à-dire faire voir qu'elles coïncident pour toute valeur de la variable : il suffit maintenant de démontrer la coïncidence d'un nombre plus restreint d'éléments ([3]) ». C'est l'important théorème (Ire Partie, p. 214 et 300) sur lequel repose le prolongement analytique. En même temps, Riemann insiste sur la différence entre la définition d'une fonction et les diverses expressions dont cette fonction est susceptible; il éclaircit sa pensée par des exemples géométriques.

§ I. — Les fonctions harmoniques.

307. L'étude des fonctions harmoniques sert de base aux travaux de Riemann; ces fonctions ont en elles-mêmes une impor-

---

([1]) « Wenn es die immer mehr hervortretende *Tendenz der neueren Analysis ist Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen,* so giebt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält ». Dirichlet, *Œuvres de Jacobi,* t. I, p. 27.

([2]) Si la pensée de définir une fonction par des propriétés de continuité, de monogéité, etc., n'était pas absolument nouvelle (Cauchy l'avait eue), au moins est-ce Riemann qui l'a précisée et lui a donné son plein développement. Quant à l'idée de poursuivre l'étude de ces fonctions sur des surfaces à feuillets multiples, elle appartient exclusivement à Riemann.

([3]) Riemann, *Dissertation inaugurale* (trad. d'après l'édit. Weber, p. 38).

tance capitale : aussi commencerons-nous par établir quelques-unes de leurs propriétés.

Rappelons leur définition.

Une fonction de deux variables réelles est harmonique en un point, lorsque dans son voisinage elle est continue, admet des dérivées des deux premiers ordres elles-mêmes continues, et satisfait à l'équation de Laplace. Elle est harmonique dans un domaine à connexion simple ou multiple, domaine qui peut se recouvrir lui-même, lorsqu'elle est harmonique en tout point intérieur [1].

Comme exemples de fonctions harmoniques, citons [2] :

1° *Le potentiel logarithmique* dans tout domaine *plan* borné ne contenant aucune des masses attirantes [3] et cela qu'il s'agisse du potentiel d'*une seule masse* attirante m, du potentiel de plusieurs masses attirantes *isolées* m_i $\Big($le potentiel s'exprime dans ces cas par $m \log \frac{1}{r}$ ou $\sum_i m_i \log \frac{1}{r_i}$, r_i désignant la distance du point attirant de masse m_i au point attiré ou *potentié*$\Big)$, ou enfin du potentiel de *masses continues* recouvrant un arc de courbe ou

---

(1) Les dérivées secondes peuvent avoir des discontinuités pourvu que ces discontinuités forment seulement des lignes algébriques : même très souvent, on ne fait aucune hypothèse sur la continuité des dérivées secondes.

Souvent aussi, on entend par fonction harmonique une fonction qui ne jouit qu'*en général* des propriétés ci-dessus, de même que l'on regarde comme analytique une fonction qui est *en général* holomorphe ou régulière (il y a lieu alors de distinguer les points à distance finie ou infinie où la fonction harmonique est régulière de ceux où elle ne l'est pas, n° 310, note).

(2) Une fonction *de p variables* ($p > 2$) est harmonique dans un domaine $\mathcal{D}$ lorsqu'elle jouit dans $\mathcal{D}$ des mêmes propriétés que les fonctions de deux variables, et, de plus, *s'annule à l'infini* dans le cas où le domaine $\mathcal{D}$ est illimité (du moins, ajoute-t-on presque toujours cette condition, *voir* les notes p. 52, 60, 61).

(3) Voici les titres de quelques Ouvrages classiques sur le potentiel logarithmique ou le potentiel ordinaire :

Poincaré, *Potentiel newtonien*, 1899. — C. Neumann, *U. über das Logar. und Newton'sche Potential*, 1877. — Harnack, *Grundlagen der T. des logar. Potentiales*, 1887. — Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, 1899 et 1900, etc.

Cf. aussi Picard, *Analyse*, t. I et II. — Duhem, *Leçons sur l'Électricité*, t. I.

une aire (le potentiel s'exprime alors par une intégrale définie) (¹).

2° Les fonctions u et v obtenues en mettant une fonction analytique $f(z)$ sous la forme $u + iv$ (n° 318).

3° Les fonctions de Green dont nous parlons plus loin.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions harmoniques *uniformes*.

308. A la base de leur étude, nous placerons une relation qui jouera ici le même rôle que la formule de Cauchy (Iʳᵉ Partie, p. 281) dans la Théorie des fonctions analytiques.

(¹) Lorsque des masses exercent sur un point matériel (a, b) une action qui dépend de la distance, les composantes de cette action sont les dérivées partielles d'une même fonction, dite *potentiel*.

Les potentiels les plus intéressants sont, *dans le plan*, le potentiel logarithmique; dans l'*espace* à trois et à p dimensions, le potentiel newtonien et celui qui correspond à l'attraction en raison inverse de la $(p-1)^{\text{ième}}$ puissance de la distance.

Soit un point attirant unique (x, y) de masse m. Les trois potentiels ci-dessus ont respectivement pour expressions $m \log r^{-1}$, $m r^{-1}$, $m r^{2-p}$, en désignant par r la distance du point attirant (x, y) au point attiré (a, b).

Une vérification de calcul montre que ce sont des fonctions harmoniques dans tout domaine fini, sauf au point attirant. Même remarque pour le potentiel d'un système de points isolés.

Soient des masses attirantes (x, y) *distribuées linéairement ou superficiellement* dans le plan, avec une densité $\rho(x, y)$ continue et ayant des dérivées finies et intégrables.

Les potentiels logarithmiques d'une courbe γ ou d'une aire δ ont pour expressions

$$P_\gamma = \int \rho \log \frac{1}{r}\, ds, \qquad P_{\gamma\gamma} = \int \rho \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn}\, ds, \qquad P_\delta = \iint \rho \log \frac{1}{r}\, d\sigma$$

(ce sont donc respectivement des potentiels ordinaires ou de *simple couche, de double couche, superficiels*). P_γ et P_δ sont des fonctions continues de (a, b) *même sur la courbe ou dans l'aire attirante*, par suite, dans toute région finie.

En vertu de l'équation

$$\frac{dP_\gamma}{dn} + \frac{dP_\gamma}{dn'} = -2\pi\rho,$$

où les dérivées se rapportent à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe γ, P_γ a sa

Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ des fonctions de deux variables réelles, finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, dans un domaine D fermé à connexion simple ou multiple, et sur sa frontière Γ ([1]).

Parmi les formules dites de Green, qui permettent la transformation d'intégrales doubles en intégrales curvilignes, considérons la relation (*voir* p. 70)

$$\int_\Gamma \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) ds + \int\int_D (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = 0,$$

où le symbole $\frac{d}{dn}$ désigne la dérivée prise dans le sens de la nor-

---

dérivée normale du premier ordre *discontinue* lorsqu'on traverse la courbe γ : elle diminue de $2\pi\rho$ lorsqu'on va de l'intérieur vers l'extérieur.

Ainsi, quand deux points situés de part et d'autre de γ tendent vers une même position sur γ, les composantes normales des forces exercées sur ces deux points n'ont pas des limites égales et de signes contraires.

Quant au potentiel de double couche $P_{\gamma'}$, ce n'est plus lui qui est continu quand on traverse γ, c'est sa dérivée estimée suivant la normale.

Enfin P_δ a ses dérivées du premier et du second ordre continues, même dans δ; mais ses dérivées du second ordre sont discontinues quand on traverse la frontière de δ, puisqu'à l'extérieur et à l'intérieur de δ, elles vérifient respectivement les équations de Laplace et de Poisson

$$\Delta P_\delta = 0, \qquad \Delta P_\delta = -2\pi\rho.$$

Aussi ce potentiel n'est-il une fonction harmonique que dans les régions extérieures aux masses attirantes (*cf.* pour le plan, HARNACK, *Grundlagen, etc.*, p. 20 et 29; pour l'espace, où l'on a des formules analogues en remplaçant 2π par 4π, *cf.* POINCARÉ, *Potentiel newtonien*, p. 138; *A. M.*, t. XX, p. 60).

C'est Lagrange qui signala le premier (*Nouveaux Mémoires de l'A. de Berlin*, 1777, publiés en 1779) la propriété fondamentale du potentiel. Son importance a été mise en lumière par Laplace, qui l'utilisa fréquemment en Mécanique céleste. Poisson, dans le Mémoire qui créa l'Électrostatique théorique (*Savants étrangers*, 1811) introduisit en Physique l'usage du potentiel, et, depuis cette époque, les méthodes analytiques des astronomes sont couramment employées par les physiciens dans leurs recherches. Green [*Essay on the application of mathematical analysis* (1828)] et Gauss [*Mémoires de Göttingue* (1840); *Œuvres*, t. V], qui lui donnèrent les noms de *fonction potentielle* et de *potentiel*, en ont poursuivi l'étude.

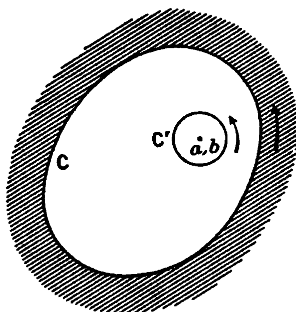
([1]) La formule de Green ci-dessous subsiste, alors même qu'on remplace l'hypothèse de la continuité sur Γ des dérivées partielles de u et v par des conditions plus larges (*cf.* Ire Partie, p. 272).

male *intérieure* au contour Γ [1]. Quand les fonctions u et v sont harmoniques, cette formule devient

$$(1) \qquad \int_\Gamma \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) ds = 0.$$

Prenons pour fonction v *la fonction harmonique à étudier;* soit C la frontière du domaine $\mathcal{D}$ dans laquelle elle est harmonique [2]. Nous choisirons pour seconde fonction harmonique u *un potentiel* $\log r$ égal au signe près au potentiel logarithmique, r désignant la distance d'un point (a, b) *intérieur* à $\mathcal{D}$ à un point variable (x, y). Ces fonctions u et v sont harmoniques dans le domaine D à connexion multiple (*fig.* 9) obtenu en détachant

Fig. 9.



de $\mathcal{D}$ la surface d'un cercle C′ ayant pour centre (a, b) et ne

---

(1) Pour étudier les fonctions harmoniques dans l'espace à trois ou à p dimensions, on part de la formule analogue

$$\int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma + \int (u \Delta v - v \Delta u)\, d\tau = 0;$$

la seconde intégrale s'étend aux éléments $d\tau$ d'un volume fermé T de l'hyperespace, et la première aux éléments $d\sigma$ de la frontière S de ce volume : les dérivées sont prises sur la normale à l'élément $d\sigma$ vers l'*intérieur*. On y remplacera u non plus par le potentiel logarithmique $\log r^{-1}$, mais par le potentiel newtonien r^{-1} ou r^{p-2}. *Cf.* Poincaré, *A. M.*, t. XXII, p. 92. — Appell, *A. M.*, t. IV, p. 329.

(2) On suppose que les fonctions u et v, harmoniques dans $\mathcal{D}$, sont de plus continues sur C et ont sur C une dérivée normale déterminée et intégrable. S'il

sortant pas de $\mathfrak{D}$. La formule (1) appliquée à ce domaine, dont la frontière Γ est (C, C′), devient

$$(2)\qquad \int_{C}\left(\log r\frac{dv}{dn}-v\frac{d\log r}{dn}\right)ds=\int_{C'}\left(\log r\frac{dv}{dn}-v\frac{d\log r}{dn}\right)ds.$$

(Les intégrales curvilignes sont prises dans le sens des flèches, et la normale intérieure à la courbe C′ est devenue aussi la normale intérieure à la courbe géométrique. *Cf.* Ire Partie, p. 11.)

Évaluons le second membre de cette relation, et, pour cela, décomposons l'intégrale qui y figure en deux autres. La première est nulle, car r est constant lorsque (x, y) décrit la circonférence C′, ce qui donne

$$\int_{C'}\log r\frac{dv}{dn}ds=\log r\int_{C'}\frac{dv}{dn}ds=0,$$

d'après la formule (1) où l'on aurait remplacé u par l'unité.

Pour calculer la seconde intégrale, je remarque que $dr:dn$, ou $-\cos\omega$ (*voir* p. 63), est égal à -1 sur C′; on a donc

$$\frac{d\log r}{dn}=\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}=-\frac{1}{r}$$

et, par suite,

$$-\int_{C'}v\frac{d\log r}{dn}ds=\frac{1}{r}\int_{C'}v\,ds.$$

Le second membre de cette égalité ne dépend pas du rayon r du cercle C′, à cause de la relation (2); or, lorsque r est très petit, on voit (en raisonnant comme pour établir la formule de Cauchy) que ce second membre diffère aussi peu que l'on veut du produit $2\pi v(a, b)$: il lui est donc rigoureusement égal et

---

en était autrement, on remplacerait C par un contour intérieur très voisin (nous faisons cette remarque une fois pour toutes, *voir* Ire Partie, p. 280). Ainsi les formules (1), (2), (3), (4), (5) ne sont pas forcément applicables, si C est la *frontière naturelle* du domaine où la fonction v est harmonique.

Il n'est pas nécessaire que les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, qui sont continues dans $\mathfrak{D}$, le soient aussi sur C; sinon, d'après un théorème de M. Painlevé (*A. T.*, 1888, B., p. 26), la fonction $v(s)$ continue le long de C aurait une dérivée sur C, ce qui n'est pas nécessaire. (*Voir* plus haut les hypothèses requises pour que le problème de Dirichlet soit possible.)

l'on a

$$(3)\qquad v(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left(\log r\,\frac{dv}{dn}-v\,\frac{d\log r}{dn}\right)ds.$$

C'est la formule fondamentale cherchée : elle fait connaître les valeurs de la fonction v au point (a, b) à l'aide de ses valeurs et de celles de sa dérivée normale sur une courbe quelconque entourant ce point, et cela sous forme d'une somme de potentiels de simple et de double couche [1].

Comme dans la formule fondamentale de Cauchy (Ire Partie, p. 281), le second membre de l'égalité (3) est nul, lorsque le point (a, b) est *extérieur* au domaine $\mathfrak{D}$ [2].

309. Cette formule ne résout pas en général le problème de Dirichlet, puisqu'elle exige la connaissance de la fonction v et de

---

[1] En prenant pour contour C une circonférence de centre (a, b) et de rayon R, la formule (3) devient, d'après les remarques qui précèdent,

$$v(a,b)=\frac{1}{2\pi R}\int_C v(s)\,ds:$$

c'est la *formule de la moyenne de Gauss* [on peut aussi la déduire de la relation (4) *infra*] : elle apprend que la valeur de v au centre d'une circonférence est la moyenne arithmétique de ses valeurs sur cette circonférence, quel qu'en soit le rayon. Gauss a pris cette belle proposition comme point de départ de sa Théorie des fonctions harmoniques (*Œuvres*, t. V, p. 222).

[2] On écrit souvent la relation (3) sous la forme

$$v(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left(v\,\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}-\log\frac{1}{r}\,\frac{dv}{dn}\right)ds;$$

elle a pour analogue dans l'espace à p dimensions

$$v(a,b,\ldots,l)=\frac{1}{k}\iint\cdots\int\left(v\,\frac{dr^{2-p}}{dn}-r^{2-p}\,\frac{dv}{dn}\right)d\sigma:$$

le potentiel logarithmique $\log r^{-1}$ a été remplacé par le potentiel r^{2-p}; l'intégrale est étendue à un domaine à $p-1$ dimensions; k est un nombre égal à $p-2$ fois l'aire de l'hypersphère de rayon 1 (ainsi $k=4\pi$ dans l'espace ordinaire). *Cf.* POINCARÉ, *A. M.*, t. XXII, p. 108.

La formule (3) conduit simplement au théorème des résidus de Cauchy, dont au fond elle n'est pas distincte (*cf.* POINCARÉ, *Potentiel newtonien*, p. 149).

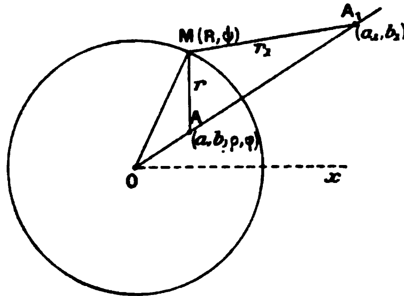
Ces relations, établies par Green dès 1828, sont des cas particuliers de formules trouvées par Kirchhoff, relatives aux fonctions harmoniques généralisées

$$v(x,y,z,t),$$

sa dérivée normale sur C; mais dans le cas où le contour C est *une circonférence,* on peut faire disparaître cette dérivée ([1]).

Pour y parvenir, introduisons le conjugué $A_1(a_1, b_1)$ du point $A(a, b)$ (*fig.* 10) par rapport à la circonférence C; appe-

Fig. 10.



lons r et r_1 les distances d'un point variable M de C à ces deux

---

intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Suivant qu'un point (a, b, c) est *intérieur* ou *extérieur* à un domaine $\mathcal{D}$ de frontière S, une intégrale de surface, qui est étendue à S et dont l'élément différentiel dépend des valeurs de v et de celles de sa dérivée normale sur S, est égale à $v(a, b, c, t)$ ou à zéro.

Voir KIRCHHOFF, *Sitzungsb. der Berliner A.*, 1882, p. 641 (trad. *A. E. N.*, 1886): — MAGGI, *Annali di M.*, t. XVI. — BELTRAMI, *Rendiconti del I. Lombardo*, 1889. — DUHEM, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, t. I, p. 160.

Ce théorème de Kirchhoff *ne s'étend pas* aux intégrales des équations analogues relatives au plan ou à l'hyperespace

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

de là, en Physique mathématique, des différences dans la propagation du son dans les milieux à trois dimensions, et dans ceux qui ont deux dimensions ou plus de trois dimensions.

A leur tour, les relations trouvées par Kirchhoff peuvent être regardées comme inspirées par des formules analogues, dues à Helmholtz, relatives aux solutions $v(x, y, z)$ de l'équation $\Delta v + k^2 v = 0$. (*J. de Crelle,* t. 57. — *Cf.* aussi DUHEM, *Leçons sur l'Hydrodynamique,* t. I, p. 319.)

([1]) Soit P un point arbitraire intérieur à la circonférence C : la *fonction de Green* (n° 315) relative au cercle C et au pôle A a pour expression

$$\log\frac{1}{AP} - \log\frac{R}{OA.A_1P}$$

points, et R le rayon de C. Le point A_1 étant extérieur à cette circonférence, on a

$$(3') \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\log r_1 \frac{dv}{dn} - v\frac{d\log r_1}{dn}\right) ds.$$

Retranchons membre à membre les égalités (3) et (3′); le rapport $r : r_1$ reste constant sur la circonférence C, et par suite, d'après une remarque faite plus haut, l'intégrale correspondante disparaît. On a donc

$$v(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C v\left(\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn}\right) ds.$$

Soit O le centre du cercle C; posons

$$OA = \rho, \quad OA_1 = \rho_1, \quad \rho\rho_1 = R^2, \quad \widehat{OMA} = \omega, \quad \widehat{OMA_1} = \omega_1.$$

Les triangles OMA, OMA_1 donnent

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega,$$
$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\omega_1;$$

par suite, à cause des relations

$$\rho_1 = \frac{R^2}{\rho}, \qquad \frac{r_1}{r} = \frac{R}{\rho},$$

on a

$$\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}$$
$$= \frac{\cos\omega}{r} - \frac{\cos\omega_1}{r_1}$$
$$= \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr^2} - \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1^2} = \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2},$$

(car cette expression est nulle quand P vient sur C, elle est infinie comme $\log r^{-1}$ quand P vient en A). On sait donc résoudre pour le cercle le *problème de Green*, et par suite le *problème de Dirichlet* puisqu'il lui est équivalent. Dès lors, si les transformations que nous allons indiquer réussissent, c'est qu'elles se rattachent à un procédé général qui sera développé plus loin (n° 315).

Dans les mêmes conditions, la fonction de Green pour la sphère est

$$\frac{1}{AP} - \frac{R}{OA.A_1P}.$$

d'où finalement la formule

$$(4) \qquad v(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{R^2-\rho^2}{Rr^2} v(s)\,ds,$$

que l'on écrit encore

$$v(A) = \frac{1}{2\pi R}\int_C \frac{R^2-\overline{OA}^2}{\overline{AM}^2} v(M)\,ds.$$

Introduisons sous le signe d'intégration les coordonnées polaires (R, Ψ), (ρ, φ), pour désigner les points de la circonférence C et les points intérieurs. On a

$$r^2 = R^2 - 2R\rho\cos(\Psi-\varphi) + \rho^2 \qquad (ds = R\,d\Psi),$$

et par suite, la formule (4) devient

$$(5) \qquad v(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\Psi-\varphi)+\rho^2} v(\Psi)\,d\Psi.$$

C'est de cette expression des fonctions harmoniques que nous allons déduire leurs propriétés ([1]).

310. Théorème I. — *Une fonction $v(x,y)$, harmonique dans un domaine $\mathfrak{D}$, est développable dans le voisinage de tout point intérieur à $\mathfrak{D}$ en série de Fourier, en série de polynomes harmoniques homogènes, en série de puissances* ([2]).

([1]) Les intégrales (4) et (5) sont connues sous le nom d'*intégrales de Poisson*.

De même que la formule de Cauchy donne, dans un domaine, l'expression d'une fonction analytique uniforme, pourvu que l'on connaisse ses valeurs sur la frontière de ce domaine, de même, grâce à la formule (5), il suffit de connaître sur une circonférence de cercle une fonction harmonique à son intérieur pour en avoir l'expression dans tout le cercle.

C'est dire que *cette formule résout le problème de Dirichlet dans le cas du cercle* [cette solution est due à M. Schwarz (*J. de Crelle*, t. 74 ou *Œuvres*, t. II, p. 185)]. Une formule analogue résout le problème de Dirichlet pour la sphère et l'hypersphère (Poincaré, *A. M.*, t. II, p. 102). Ajoutons que dans le cas de la sphère, la solution du problème de Dirichlet à l'aide de développements en séries de fonctions sphériques est connue depuis Laplace et Legendre.

([2]) Une fonction harmonique *en général* dans un domaine est *régulière* en un point de ce domaine, par exemple à l'origine, lorsqu'elle est développable en série de polynomes harmoniques homogènes dans le voisinage de ce point. Elle est régulière *à l'infini* lorsqu'elle est développable, à l'extérieur d'un cercle

Supposons, comme on peut toujours le faire, que le domaine $\mathfrak{D}$ renferme l'origine et occupons-nous du voisinage de ce point.

1° Soit C une circonférence de rayon R ayant l'origine pour centre et intérieure à $\mathfrak{D}$: la fonction v continue sur cette circonférence a, en un point quelconque (a, b) situé à son intérieur, une valeur donnée par la formule (5). Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle écrite sous son signe d'intégration, en y regardant la distance ρ du point (a, b) à l'origine comme la variable; il vient

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\Psi-\varphi)+\rho^2}=-1+\frac{R}{R-\rho\, e^{i(\Psi-\varphi)}}+\frac{R}{R-\rho\, e^{-i(\Psi-\varphi)}}.$$

R surpasse ρ; aussi chaque fraction est développable en série entière en $\frac{\rho}{R}$; on a ainsi

$$\frac{R}{R-\rho\, e^{i(\Psi-\varphi)}}=1+\frac{\rho}{R}e^{i(\Psi-\varphi)}+\ldots+\frac{\rho^n}{R^n}e^{ni(\Psi-\varphi)}+\ldots.$$

Dans cette identité changeons le signe de i, et portons dans la formule (5) les développements ainsi obtenus. Les cosinus des multiples de l'arc $\Psi-\varphi$ s'introduisent, et cette formule devient

$$v(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\frac{\rho}{R}\cos(\Psi-\varphi)+\ldots\right.$$
$$\left.+2\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\Psi-\varphi)+\ldots\right]v(\Psi)\,d\Psi.$$

---

de rayon suffisamment grand, en série de polynomes harmoniques homogènes relativement aux puissances négatives des variables (souvent aussi, on regarde une fonction harmonique comme régulière à l'infini lorsqu'elle se comporte à l'extérieur de ce cercle comme l'expression $a\log r^{-1}+b$, a et b désignant deux constantes).

Le théorème énoncé (les principes d'où il découle ont été posés par RIEMANN, *Œuvres*, trad. p. 21; *cf.* aussi SCHWARZ, *Œuvres*, t. II, p. 189) montre qu'une fonction harmonique est analytique (variables réelles).

Cette proposition, jointe à sa réciproque, permet de définir les fonctions harmoniques, comme les fonctions analytiques de variables complexes, soit par des propriétés fonctionnelles (Riemann), soit par une expression arithmétique (Weierstrass).

Enfin, M. Painlevé a montré que toute fonction harmonique est développable, d'une infinité de manières, en série de polynomes harmoniques, homogènes *ou non* (*A. T.*, 1888, B., p. 85 et 112).

La série écrite sous le signe d'intégration converge uniformément (Ire Partie, p. 122); on peut donc l'intégrer terme par terme. Posons

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\Psi \, v(\Psi)\, d\Psi, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\Psi \, v(\Psi)\, d\Psi;$$

nous obtenons le développement en *série de Fourier*

$$(6)\quad \begin{cases} v(a, b) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \dfrac{\rho}{R}(\alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{\rho^n}{R^n}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \ldots \end{cases}$$

valable en tout point (a, b) intérieur au cercle C.

2° Le terme général de ce développement [1] peut être regardé comme un polynome homogène de degré n en a et b, en vertu des égalités

$$a = \rho\cos\varphi, \qquad b = \rho\sin\varphi,$$
$$(a + bi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$
$$(a - bi)^n = \rho^n(\cos n\varphi - i \sin n\varphi);$$

d'où l'on déduit, en désignant par π_n et ω_n des polynomes harmoniques homogènes de degré n,

$$\rho^n \cos n\varphi = \pi_n(a, b),$$
$$\rho^n \sin n\varphi = \omega_n(a, b).$$

La formule (6) devient donc (en faisant rentrer les facteurs R^{-n} dans les coefficients α_n et β_n),

$$(7)\qquad v(a, b) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pi_n + \beta_n \omega_n) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a, b);$$

les polynomes p_n, homogènes en a et b, satisfont à l'équation de Laplace, comme les polynomes π_n et ω_n; ils correspondent aux polynomes appelés *polynomes sphériques* dans le cas de trois variables (Ire Partie, p. 196). Notons que le développement (7) converge

---

[1] On verrait aisément que ce développement est indépendant du rayon R du cercle C, en le comparant au développement relatif à un autre cercle de rayon R′ (R′ < R); donc il définit bien la fonction.

dans le cercle C et converge uniformément dans tout cercle de rayon moindre ([1]).

De même, dans le voisinage de tout point (a_0, b_0) intérieur au domaine où la fonction v est harmonique, on aura

$$v(a, b) = p_0 + p_1(a - a_0, b - b_0) + \ldots + p_n(a - a_0, b - b_0) + \ldots.$$

3° Pour justifier la troisième partie du théorème ([2]), reprenons le développement (7). Les termes de même degré en a et b y sont groupés ensemble de manière à constituer l'élément de la série : est-il permis de modifier arbitrairement l'ordre de ces termes, et par suite peut-on définir autour de l'origine un domaine dans lequel la fonction soit développable en série entière?

Nous allons prouver que la série (7) converge *absolument*, en ce sens qu'elle reste convergente quand on remplace chaque terme des polynomes p_n par sa valeur absolue; mais tandis que la série de polynomes homogènes convergeait à l'intérieur du cercle décrit

---

([1]) Voici le théorème relatif à la convergence du développement d'une fonction de variables réelles en série de polynomes homogènes, auquel il a été fait allusion à propos du théorème d'Abel (Ire Partie, p. 216) :

Quand les modules des termes $k_i a^{n-i} b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ des polynomes p_n restent inférieurs, en un point (a_0, b_0), à un nombre fixe L, la série de polynomes converge dans le rectangle $|a| < |a_0|$, $|b| < |b_0|$.

En effet, on a alors

$$|p_n(a, b)| < L\left(\left|\frac{a}{a_0}\right|^n + \left|\frac{a}{a_0}\right|^{n-1}\left|\frac{b}{b_0}\right| + \ldots + \left|\frac{b}{b_0}\right|^n\right) < (n+1)L\omega^n,$$

en désignant par ω le plus petit des deux quotients $\left|\frac{a}{a_0}\right|$, $\left|\frac{b}{b_0}\right|$; par suite la série converge pour $\omega < 1$.

([2]) On a même prouvé qu'une série dont les termes sont des polynomes homogènes quelconques de degrés croissants, à plusieurs variables, définit une fonction holomorphe (*variables complexes*) dans le voisinage de l'origine et dès lors développable en série entière (*variables complexes*), dès que cette série de polynomes converge uniformément sur l'ensemble des valeurs des variables réelles et voisines de zéro, et même dès qu'elle converge uniformément sur des ensembles bien moins étendus. Par exemple une série de polynomes à deux variables complexes z et u $(z = a + ia'; \; u = b + ib')$ est holomorphe à l'origine, si elle converge uniformément pour les systèmes de valeurs réelles de a et b représentant les coordonnées des points d'un arc de courbe (autre qu'une droite) passant par l'origine, arc tracé dans le plan réel aob (DULAC, *C. R.*, 1903, 2e semestre, p. 308).

de l'origine avec R pour rayon, on ne peut affirmer la convergence absolue que dans le cercle concentrique de rayon $\frac{R}{2}$.

Pour l'établir, remarquons que les coefficients α_n et β_n du polynome p_n ont une limite supérieure; représentons-la par $L : R^n$, et appelons r la valeur maximum de $|a|$ et $|b|$. La somme des valeurs absolues des termes du polynome p_n sera inférieure à $\frac{2L}{R^n}(|a|+|b|)^n$, et *a fortiori* à $2L\left(\frac{2r}{R}\right)^n$; donc la série (7), considérée comme série entière en a et b, converge dans le domaine $2r < R$, c'est-à-dire lorsque $|a|$ et $|b|$ sont chacun inférieurs à $\frac{R}{2}$. La convergence absolue est donc assurée dans un carré ayant l'origine pour centre, dont les côtés sont parallèles aux axes et ont pour longueur R; *a fortiori* est-elle certaine dans le cercle décrit de l'origine avec le rayon $\frac{R}{2}$ (1).

Remarque. — Une fonction harmonique dans tout domaine borné est dite *fonction harmonique entière* (2).

311. Nous venons de montrer qu'une fonction harmonique est développable en série de polynomes homogènes harmoniques. *Réciproquement,* une série de polynomes harmoniques homo-

---

(1) Le théorème de Green relatif à l'espace ayant 3 ou p dimensions conduit à des résultats analogues pour les fonctions de 3 ou p variables.

1° Une fonction harmonique dans une sphère (ou hypersphère) de rayon R ayant l'origine pour centre est développable en série de polynomes sphériques (ou hypersphériques) convergente dans cette sphère, et uniformément convergente dans toute sphère de rayon plus petit (par suite, elle est *régulière* à l'origine). Elle est développable en série entière dans une sphère de rayon $R\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$ ou $R\left(\sqrt{\frac{p+1}{p}}-1\right)$.

2° Une fonction harmonique à l'extérieur d'une sphère (et nulle ou ayant une valeur bien déterminée à l'infini) est développable en une série de polynomes sphériques à indices négatifs, convergente et uniformément convergente dans des domaines convenables (par suite elle est régulière à l'infini).

3° Une fonction harmonique dans la couronne comprise entre deux sphères concentriques admet dans cette couronne un développement analogue à celui de Laurent : un pareil développement est unique.

Cf. Appell, *A. M.*, t. IV, p. 319 et 338. — Poincaré, *A. M.*, t. XXII, p. 96 et 105. — Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2e édit., t. II, p. 55; 1881.

(2) De même, dans l'espace, une fonction harmonique dans tout domaine fini, et dès lors développable en série multiple entière toujours convergente, est appelée *fonction harmonique entière*.

gènes, convergente dans le voisinage de l'origine,

$$u(a, b) = u_0 + u_1(a, b) + \ldots + u_n(a, b) + \ldots$$

définit une fonction harmonique dans ce voisinage ([1]).

En effet, aux coordonnées cartésiennes (a, b) substituons des coordonnées polaires (r, φ) : il vient

$$u(a, b) = v(r, \varphi) = u_0 + r\, v_1(\varphi) + \ldots + r^n\, v_n(\varphi) + \ldots.$$

Appelons U_n le module maximum de $v_n(\varphi)$, quand φ varie de o à 2π; soit R le rayon de convergence de la série entière

$$u_0 + r U_1 + \ldots + r^n U_n + \ldots,$$

ce qui entraîne la convergence de la série $v(r, \varphi)$ en tout point (r, φ) intérieur au cercle décrit de l'origine pour centre avec R comme rayon ([2]).

On voit aisément que cette série $v(r, \varphi)$ converge *uniformément* par rapport à r et à φ dans tout cercle concentrique de rayon plus petit; par suite, c'est une fonction continue dans ce cercle.

Cette même série a des dérivées partielles du premier ordre par rapport à r et φ; on les obtient en dérivant cette série terme par terme. La série $u(a, b)$ a donc aussi des dérivées du premier ordre par rapport à a et à b; elles sont représentées par des séries de même forme. Cette série a donc des dérivées de tout ordre par rapport à a et à b, et elles sont représentées par des séries de même forme : toutes ces séries convergent uniformément.

Enfin, puisque la série $u(a, b)$ est continue, ainsi que ses dérivées, et que les polynomes $u_n(a, b)$ sont harmoniques, il en est de même de la série $u(a, b)$ ([3]).

([1]) Les remarques que nous allons faire relativement à la *convergence* de cette série s'appliquent à une série de polynomes homogènes quelconques.

([2]) Appelons ce cercle *cercle de convergence* de la série $u(a, b)$. Une série entière de variable complexe diverge à l'extérieur de son cercle de convergence (Ire Partie, p. 132) : les séries de polynomes dont nous parlons ici peuvent bien entendu converger *en dehors de leur cercle de convergence.*

([3]) Ces propositions s'étendent à l'espace. Une série convergente à trois variables ayant pour éléments des polynomes sphériques définit une fonction uniforme et continue soit à l'intérieur d'une sphère décrite de l'origine dite *sphère de convergence,* soit à l'extérieur de cette sphère, soit dans la région entre deux de ces sphères, suivant que ces polynomes sont homogènes par rapport aux puissances

Bientôt nous appliquerons ces remarques aux séries

$$v(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [r^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)],$$

et à ces séries mises sous la forme

$$v(a, b) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \pi_n(a, b) + \beta_n \omega_n(a, b)] \qquad [\pi_n + i\omega_n = (a + ib)^n],$$

séries que nous avons considérées plus haut. Le rayon R de leur cercle de convergence sera le plus petit des nombres l et l', en désignant par $(-l, l)$, $(-l', l')$ les intervalles dans lesquels convergent respectivement les séries entières $\sum \alpha_n r^n$, $\sum \beta_n r^n$.

312. Théorème II. — *Une fonction harmonique dans tout le plan, dont le module reste limité, est une constante* (¹).

---

positives des variables, par rapport aux puissances négatives, ou enfin les uns par rapport aux puissances positives et les autres par rapport aux puissances négatives. Dans ces mêmes domaines, la série admet des dérivées partielles de tous les ordres et satisfait à l'équation de Laplace (*cf.* Appell, *A. M.*, t. IV, p. 316).

De plus, quand une série ayant pour éléments des fonctions harmoniques à l'intérieur d'un domaine fermé $\mathfrak{D}$ et continues sur la frontière de $\mathfrak{D}$ converge uniformément sur cette frontière : 1° elle converge uniformément dans tout domaine $\mathfrak{D}'$ intérieur à $\mathfrak{D}$ et sans point commun avec sa frontière; 2° les séries formées par les dérivées partielles de ses termes convergent uniformément dans $\mathfrak{D}'$; elles représentent les dérivées de la série et satisfont à l'équation de Laplace (*cf.* nᵒˢ 233, 314 et Painlevé, *A. T.*, 1888, B., p. 14).

(¹) Ce théorème est une conséquence immédiate de celui de Cauchy-Liouville (p. 92).

En effet, soit v_1 la fonction complémentaire de v. Si $|v|$ ne dépasse pas un nombre fixe, e^{v+iv_1} est une fonction de z dont le module est limité, par suite elle est constante; dès lors v est aussi constant.

La démonstration du texte due à M. Picard (*C. R.*, 1880, 1ᵉʳ semestre, p. 601) s'applique aux fonctions de trois variables : ce géomètre a prouvé qu'en dehors des nombres constants, il n'y a pas de fonction harmonique régulière dans toute portion finie de l'espace et dont le module soit limité (*cf.* aussi Poincaré, *Potentiel newtonien*, p. 210; *A. M.*, t. XXII, p. 110).

On en conclut qu'*une fonction harmonique entière à p variables, p fois périodique, est constante.*

En effet l'espace à p dimensions peut alors être divisé en une infinité de *prismatoïdes des périodes* formant un assemblage à la Bravais, à l'intérieur desquels la fonction reprend la même valeur.

En effet, soient $v(x, y)$ cette fonction et L une limite supérieure de son module. La différence entre les valeurs de v en un point arbitraire $(x, y;\, r, \varphi)$ et à l'origine a pour expression, d'après la formule (5),

$$v(x, y) - v(0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2rv\,\frac{R\cos(\Psi - \varphi) - r}{R^2 - 2rR\cos(\Psi - \varphi) + r^2}\,d\Psi.$$

La valeur absolue de ce second membre ne peut qu'augmenter si l'on remplace, sous le signe d'intégration, le numérateur par un nombre $2rL(R + r)$ jamais inférieur à son module maximum, et le dénominateur par son minimum $(R - r)^2$. On a donc

$$|v(x, y) - v(0, 0)| < \frac{2rL(R + r)}{(R - r)^2}.$$

Cette inégalité est satisfaite pour toutes les valeurs de R et $r (r < R)$, et son second membre tend vers zéro avec R^{-1}; donc la fonction a même valeur en un point arbitraire (x, y) et à l'origine : c'est bien une constante.

313. Théorème III. — *Une fonction, harmonique dans un domaine* $\mathfrak{D}$ *à connexion simple ou multiple, ne peut avoir de maximum ni de minimum à l'*INTÉRIEUR *de ce domaine.*

En effet, soit (a, b) un point où la fonction considérée $v(x, y)$ est par exemple maximum. Si ce point est *intérieur* à $\mathfrak{D}$, on peut développer $v(x, y)$ en une série de polynomes harmoniques homogènes par rapport aux puissances de $x - a$ et $y - b$, ce qui donne

$$v(x, y) = p_0(a, b) + p_1(x - a, y - b) + \ldots \\ + p_n(x - a, y - b) + \ldots.$$

La fonction v étant maximum au point (a, b), le polynome p_1 s'annule identiquement; quelques-uns des polynomes p_2, p_3, ... peuvent aussi être nuls : soit p_n le polynome de degré moindre différent de zéro. L'introduction des coordonnées polaires (r, φ) le met sous la forme $r^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)$, et par suite montre qu'il est impossible de prendre r assez petit pour que p_n garde un signe constant quel que soit φ. Donc, si le point (a, b) est intérieur à $\mathfrak{D}$, la différence $v(x, y) - p(a, b)$ change de signe dans le voi-

sinage de (a, b) et dès lors la fonction n'est pas maximum en ce point (¹).

Corollaire. — Quand une fonction harmonique dans un domaine limité $\mathcal{D}$ reste encore *continue sur sa frontière* C, elle atteint effectivement un maximum et un minimum sur C, puisqu'elle a dans ce cas un maximum et un minimum dans $\mathcal{D}$ ou sur C (Ire Partie, p. 44). Par suite, si elle n'est pas constante dans $\mathcal{D}$, elle a en tout point de $\mathcal{D}$ une valeur comprise entre sa plus grande et sa plus petite valeur sur C (²).

En particulier, elle est positive dans tout le domaine $\mathcal{D}$, si elle est positive sur C; si elle est nulle (ou constante) sur C, elle est nulle (ou constante) dans $\mathcal{D}$.

Nous supposons essentiellement le domaine $\mathcal{D}$ *borné;* car, par exemple, une fonction harmonique peut être constante sur la frontière d'un domaine illimité sans être constante dans ce domaine, au moins si elle ne reste pas *finie* à l'infini (³).

(¹) De même, *dans l'espace* ou l'hyperespace, une fonction harmonique dans un domaine $\mathcal{D}$ ne peut atteindre son maximum ou son minimum à l'*intérieur* de $\mathcal{D}$.

Green a donné de cette proposition une autre démonstration simple qui repose sur le théorème de la moyenne de Gauss (p. 234, note).

Pour le plan, *cf.* Riemann, *Œuvres*, trad. p. 26. — Schwarz, *Œuvres*, t. II, p. 202. — Neumann, *M. A.*, t. III, p. 340 et 430. — Harnack, *Grundlagen*, p. 48. Pour l'espace, *cf.* Gauss, *Œuvres*, t. V, p. 228. — Poincaré, *Potentiel newtonien*, p. 135.

Plus généralement, étant données les valeurs extrêmes L et L', sur la frontière de $\mathcal{D}$, d'une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, on peut trouver, pour la différence des valeurs qu'elle prend en deux points donnés situés à l'intérieur de $\mathcal{D}$, une limite supérieure qui est une fraction déterminée de $L - L'$.

(²) Une fonction harmonique dans le domaine $\mathcal{D}_e$ *extérieur* à une courbe fermée C ne peut avoir de maximum ou de minimum que sur C *ou à l'infini*. Si la fonction est nulle à l'infini, on démontre que cette valeur zéro n'est ni maximum, ni minimum; par suite la fonction a ses valeurs extrêmes sur C. En particulier, si elle est nulle à l'infini et constante sur C, elle est nulle dans $\mathcal{D}_e$. *Cf.* Harnack, *Grundlagen, etc.*, p. 48.

(³) *Cf.* Gauss, *Œuvres*, t. V, p. 224. Dans l'espace, si une fonction harmonique dans un domaine $\mathcal{D}$ limité par une surface fermée S (ou harmonique dans le domaine $\mathcal{D}_e$ extérieur à S et nulle à l'infini) est nulle sur S, elle est nulle dans $\mathcal{D}$ (ou dans $\mathcal{D}_e$).

Nous venons de voir (p. 243) qu'une fonction harmonique dans tout l'espace et nulle à l'infini est identiquement nulle : dès lors, le domaine dans lequel une fonction est harmonique a une frontière.

THÉORÈME IV. — *Le problème de Dirichlet intérieur n'a qu'une solution.*

En effet, s'il existait deux fonctions harmoniques dans un domaine limité ⅅ et prenant sur sa frontière C la même suite *continue* de valeurs ([1]), leur différence, harmonique dans ⅅ, serait nulle en tous les points de C. Ceci est impossible, en vertu du dernier corollaire, à moins que les fonctions ne coïncident dans tout le domaine ⅅ ([2]).

([1]) Le théorème reste vrai lorsque la fonction harmonique cesse de tendre vers une valeur déterminée en des points *isolés* de C (la suite des valeurs données restant forcément continue le long de toute portion de C qui ne renferme aucun de ces points singuliers, p. 60), *pourvu que dans leur voisinage son module reste inférieur à un nombre fixe. Cf.* HARNACK, *Grundlagen, etc.*, p. 132. — J. RIEMANN, *A. E. N.*, 1888, p. 352 et 408. — PICARD, *Analyse*, t. II, p. 45.

([2]) Le même raisonnement montre qu'il existe une *seule* fonction u qui, dans un domaine ⅅ, satisfait à l'équation $\Delta u + ku = 0$ et prend sur sa frontière des valeurs données, lorsque k est une constante *négative* (*voir* la note p. 52).

Que peut-on affirmer, dans le cas général, relativement à une équation *linéaire* aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes du type (1), p. 50.

1° Considérons une région du plan où l'équation est du *type elliptique*, et supposons qu'on ait démontré l'existence d'une solution uniforme et continue, ainsi que ses dérivées premières, dans un domaine fermé ⅅ, et prenant sur sa frontière C des valeurs données.

Cette solution est *unique*, soit lorsque les points du contour fermé C s'éloignent suffisamment peu d'un point intérieur (PICARD, *J. M.*, 1890, p. 150), soit même lorsque C enveloppe une aire suffisamment petite (PICARD, *J. M.*, 1896, p. 296), soit enfin lorsque dans ⅅ le produit af n'est jamais positif (PICARD, *J. E. P.*, 1890, p. 97).

Dans ce dernier Mémoire, M. Picard suppose *analytiques* les coefficients a, b, ..., f; mais M. Paraf (*A. T.*, 1892, H., p. 49) a montré simplement qu'il suffit de les supposer *continus*. (Pour le cas de trois variables, *cf.* LE ROY, *A. E. N.*, 1897, p. 389.)

Les deux premiers théorèmes de M. Picard s'étendent d'eux-mêmes aux équations à plus de deux variables (*cf.* aussi ZAREMBA, *B. S. M.*, 1896, p. 19).

2° Considérons une région où l'équation est du *type hyperbolique*; prenons-la sous la forme (2), p. 51. Le problème analogue à celui de Dirichlet consiste à chercher, avec Riemann, une intégrale u de cette équation, continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, qui prenne, *ainsi que sa dérivée* $\frac{\partial u}{\partial x}$, des valeurs données *sur un arc de courbe* AB (et non plus sur une courbe fermée). Cette intégrale est *complètement définie* par ces valeurs, dans le rectangle de côtés parallèles aux axes et ayant A et B pour sommets opposés, pourvu que l'arc AB

Corollaire. — La résolution du problème de Dirichlet avait appris qu'il existe une fonction harmonique prenant telle suite continue de valeurs que l'on veut sur la frontière de tout domaine donné. Ici, nous voyons qu'une fonction harmonique est complètement déterminée par ces valeurs limites ([1]).

---

soit rencontré une fois au plus par des parallèles aux axes (PICARD, *J. M.*, 1890, p. 166; *B. D.*, 1899, p. 150. — DARBOUX, *Surfaces*, t. II, p. 75).

De même, les valeurs d'une intégrale de l'équation (2) sur un segment OA de l'axe des x et sur un segment OB de l'axe des y définissent complètement cette intégrale dans le rectangle construit sur OA et sur OB.

Dans le cas de trois variables, on peut avoir des théorèmes analogues. Par exemple une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

est déterminée par les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial z}$ sur un cercle Γ du plan $z = \gamma$, à l'intérieur des deux cônes de révolution passant par la circonférence Γ et ayant leurs génératrices parallèles à celles du cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Passons aux équations *non linéaires* du type $\Delta u = F(x, y, u)$. M. Picard a montré que, si dans un domaine $\mathfrak{D}$ la fonction F est bien déterminée, finie, *positive* et *croissante avec* u, il n'y a qu'une seule intégrale continue ainsi que ses dérivées dans $\mathfrak{D}$ et prenant sur C une suite donnée de valeurs, pourvu que C soit suffisamment petit. (*J. M.*, 1890, p. 173. *Cf.* aussi LE ROY, *A. E. N.*, 1897, p. 399.)

Voici donc plusieurs cas où, tout en laissant de côté le point de vue de la théorie des fonctions analytiques, l'intégrale d'une équation est définie par certaines conditions initiales dans des domaines bien déterminés.

([1]) Une fonction harmonique, au sens le plus étroit (et c'est en ce sens qu'il faut entendre les théorèmes qui précèdent), est régulière dans tout son domaine d'existence; par suite, elle est régulière à l'infini quand ce domaine est illimité.

Mais on peut aussi regarder comme harmonique une fonction qui jouit *en général* des propriétés énoncées. Alors une fonction harmonique dans un domaine illimité peut avoir à l'infini une valeur finie, ou bien devenir infinie soit comme le potentiel logarithmique, soit comme une puissance finie ou infinie de r. Dans le cas du problème de Dirichlet *extérieur*, une fonction harmonique n'est déterminée par ses valeurs limites sur C que si des hypothèses sur la nature de la fonction à l'infini permettent d'en déduire sa valeur à l'infini.

Ainsi une fonction harmonique qui doit rester finie à l'infini a une valeur à l'infini qui dépend de ses valeurs sur C : par suite, le raisonnement du texte montre qu'elle est déterminée par ces valeurs, puisqu'une fonction harmonique, nulle à l'infini et nulle sur C, est nulle dans $\mathfrak{D}_e$ (note, p. 245). Le problème extérieur ainsi entendu a une solution unique. Comme conséquence, étant donnée sur C une suite continue de valeurs, une fonction harmonique, nulle à l'infini,

314. *Théorèmes d'Harnack* ([1]). — Ce sont deux propositions qui jouent, dans la théorie des fonctions harmoniques, le rôle des théorèmes d'Abel dans l'étude des séries entières.

I. *Une série $u = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$, dont les éléments sont des fonctions harmoniques* POSITIVES *en tout point intérieur à un domaine* $\mathfrak{D}$ *d'un seul tenant, converge dans ce domaine, converge uniformément dans tout domaine intérieur et y représente une fonction harmonique, dès qu'elle converge en un point* A *intérieur à* $\mathfrak{D}$; les séries dérivées jouissent des mêmes propriétés.

Pour rapprocher la démonstration de cette proposition de celle du théorème d'Abel (Ire Partie, p. 133), nous prouverons d'abord que si la série donnée u converge au point A, elle converge uniformément dans tout cercle Γ' intérieur à une circonférence concentrique arbitraire Γ passant par A et intérieure au domaine $\mathfrak{D}$.

Soit M un point arbitraire intérieur à Γ'; supposons l'origine des coordonnées au centre O de Γ' et appliquons à chaque élément u_n la formule de Poisson (p. 237)

$$(4) \qquad v(M) = \frac{1}{2\pi R}\int_C \frac{R^2 - \overline{OM}^2}{\overline{MP}^2} v(P)\,ds,$$

en prenant pour contour d'intégration une circonférence C concentrique à Γ, intérieure à $\mathfrak{D}$, et dont le rayon R surpasse celui

---

ne peu prendre sur C que des valeurs égales, à une constante près, à cette suite.

De même, une fonction harmonique u, telle que la différence $u - m\log\left(\frac{1}{r}\right)$ ait une valeur finie à l'infini, est déterminée, à une constante additive près, par ses valeurs limites sur C (*cf.* HARNACK, *Grundlagen, etc.*, p. 79).

([1]) *Berichte der sächsischen G. der W.*, 1886 (*M. A.*, t. XXXV, p. 23); *Grundlagen, etc.*, p. 66. Le second théorème semble avoir été énoncé d'abord par M. Volterra (*Annali di M.*, 1882, p. 52).

Cf. aussi PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, B., p. 15. — POINCARÉ, *American Journal*, 1890, p. 219; *Potentiel newtonien*, p. 275, etc.

On conclut du théorème d'Harnack que l'on sait résoudre le problème de Dirichlet dans le cas le plus général, dès qu'on sait le résoudre dans le cas où la fonction cherchée prend sur la frontière C les mêmes valeurs qu'un polynome donné : c'est le point de départ de la méthode dite du *balayage*.

M. Le Roy a généralisé les théorèmes d'Harnack (*A. E. N.*, 1897, p. 418).

de Γ : ceci est permis, car les fonctions u_n harmoniques dans $\mathfrak{D}$ sont continues sur C. Chaque terme $u_n(M)$ est ainsi représenté par une intégrale à éléments tous positifs, puisque la fonction u_n est positive en tous les points P de C; dès lors, MP étant compris entre $R - OM$ et $R + OM$, on déduit de la relation (4) des limites supérieure et inférieure de $u_n(M)$ et l'on a

$$\frac{R-OM}{R+OM}\int_0^{2\pi}\frac{u_n(\Psi)}{2\pi R}\,d\Psi < u_n(M) < \frac{R+OM}{R-OM}\int_0^{2\pi}\frac{u_n(\Psi)}{2\pi R}\,d\Psi.$$

Formons les inégalités analogues relatives à $u_n(A)$. La combinaison des résultats donne

$$u_n(M) < \frac{R+OM}{R-OM}\,\frac{R+OA}{R-OA}\,u_n(A),$$

et par suite, tant que le point M ne sort pas du cercle Γ' de rayon R',

$$u_n(M) < \frac{R+R'}{R-R'}\,\frac{R+OA}{R-OA}\,u_n(A).$$

Dès lors, la série à termes positifs $u(M)$ *converge uniformément* dans Γ', puisqu'elle a ses éléments inférieurs, à un facteur numérique près, à ceux de la série convergente à termes positifs $u(A)$ (Ire Partie, p. 122).

On conclut de là que cette série est *harmonique* dans Γ'. En effet, soit P un point arbitraire d'une circonférence Γ'' concentrique à Γ', de rayon moindre R'' et renfermant le point M à son intérieur. Puisque la série u converge uniformément sur Γ'', on peut l'intégrer terme par terme le long de cette circonférence, après en avoir multiplié les éléments par le facteur borné $\dfrac{R''^2-\overline{OM}^2}{2\pi R''\,\overline{MP}^2}\,ds$ (P désigne un point variable de Γ''). Les intégrales que cette opération introduit peuvent être remplacées, d'après la formule (4), respectivement par $u_0(M)$, $u_1(M)$, ..., $u_n(M)$, ..., puisque les fonctions u_0, u_1, ..., u_n, ... sont harmoniques. On a donc

$$\int_{\Gamma''}\frac{R''^2-\overline{OM}^2}{2\pi R''\,\overline{MP}^2}\,u(P)\,ds = u(M),$$

ce qui prouve (p. 238 et 242) que la fonction $u(M)$ est harmonique à l'intérieur de Γ'.

Le théorème étant démontré pour le cercle Γ', on l'étend à tout le domaine $\mathfrak{D}$, puisqu'une chaîne formée d'un nombre fini de cercles se coupant deux à deux permet de passer du point initial A à un point quelconque situé à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ (n° **316**).

II. *Soient* $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *des fonctions harmoniques dans un domaine* $\mathfrak{D}$, *qui sur sa frontière* C *tendent vers des valeurs bien déterminées* $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n, \ldots$ (au sens donné Ire Partie, p. 279), *telles que la série* $\sum \bar{u}_n$ *converge uniformément sur* C : alors *la série* $\sum u_n$ *converge uniformément dans* $\mathfrak{D}$, *elle est harmonique dans* $\mathfrak{D}$, *sa somme* u *tend sur* C *vers une valeur bien déterminée qui n'est autre que la somme* $\bar{u}$ *de la série* $\sum \bar{u}_n$.

En effet, posons

$$u = s_n + r_n = (u_0 + \ldots + u_{n-1}) + (u_n + \ldots), \qquad r_{np} = r_n - r_{n+p};$$
$$\bar{u} = \bar{s}_n + \bar{r}_n = (\bar{u}_0 + \ldots + \bar{u}_{n-1}) + (\bar{u}_n + \ldots), \qquad \bar{r}_{np} = \bar{r}_n - \bar{r}_{n+p}.$$

En vertu de la convergence uniforme sur C de la série $\bar{u}$, on peut choisir n assez grand pour que l'on ait, sur tout le contour C, quel que soit l'entier positif p,

$$|\bar{r}_{np}| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif pris arbitrairement. Du reste, d'après les propriétés des fonctions harmoniques (p. 244), la somme r_{np}, composée d'un nombre fini de fonctions harmoniques, a à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ un module inférieur au maximum du module de sa limite $\bar{r}_{np}$ sur le contour C, et par suite à ε. C'est dire que la série u converge uniformément dans $\mathfrak{D}$.

Elle est harmonique dans $\mathfrak{D}$, d'après le raisonnement employé au théorème précédent.

Enfin, désignons par t un point quelconque de C. On peut entourer ce point d'un cercle γ assez petit pour que l'on ait, en

tout point M de $\mathfrak{D}$ intérieur à γ,

$$|s_n(\mathrm{M}) - \bar{s}_n(t)| < \varepsilon,$$

puisque la fonction continue $s_n(\mathrm{M})$ a pour limite $\bar{s}_n(t)$ au point t. On a donc, dans le voisinage de t, en vertu de la convergence uniforme des séries u et $\bar{u}$,

$$|u(\mathrm{M}) - \bar{u}(t)| = |[s_n(\mathrm{M}) - \bar{s}_n(t)] + r_n - \bar{r}_n| < 3\varepsilon,$$

ce qui justifie la troisième partie du théorème.

315. Nous utiliserons bientôt, dans la théorie de la représentation conforme, une fonction dite *fonction de Green* relative à un domaine fermé à connexion simple ou multiple $\mathfrak{D}$ et à un pôle (x_0, y_0) intérieur à $\mathfrak{D}$. On entend par là *une fonction s'annulant sur la frontière* C *de* $\mathfrak{D}$, *et partout harmonique dans* $\mathfrak{D}$ *sauf au pôle* (x_0, y_0), où elle devient infinie comme $\log r^{-1}$ (r désigne la distance du pôle à un point arbitraire x, y de $\mathfrak{D}$). Nous la représenterons par $g(x, y; x_0, y_0)$.

A tout domaine $\mathfrak{D}$ *correspond une fonction de Green.* — En effet, en résolvant le problème de Dirichlet, on apprend à former une fonction $u(x, y)$ harmonique dans $\mathfrak{D}$ et prenant sur C telles valeurs que l'on veut, par exemple les valeurs $\log r^{-1}$, et, par suite, à former la fonction $\log r^{-1} - u(x, y)$, qui jouit des propriétés énoncées [1].

Cette fonction est unique. — Car la différence de deux fonctions de Green, relatives au même domaine et au même pôle, serait identiquement nulle.

Elle est positive à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. — En effet, la fonction de Green est harmonique dans le domaine limité par le contour C

---

[1] Dans l'espace, la fonction de Green a pour expression $r^{-1} - u(x, y, z)$. Cette dernière fonction a été introduite par Green (*Essay on the application, etc.*, 1828), tandis que celle relative au plan a été considérée par Riemann. C'est aussi Riemann qui a donné à ces fonctions le nom de Green.

La fonction de Green relative au domaine *extérieur* à C a une définition analogue.

et une petite circonférence γ entourant le pôle (x_0, y_0), et elle est continue dans ce domaine *fermé;* elle est nulle sur C, et elle est positive sur γ, si γ a un rayon suffisamment petit. Donc en tout point (x, y) du domaine ayant pour frontière (C, γ), et par suite en tout point intérieur à $\mathfrak{D}$ sauf au pôle, elle a aussi une valeur positive ([1]).

Réciproquement, quand on sait former la fonction de Green, on peut résoudre le problème de Dirichlet.

En effet, soit $g(x, y; x_0, y_0)$ la fonction de Green relative au domaine $\mathfrak{D}$ et à un pôle arbitraire (x_0, y_0); appelons $v(x, y)$ la fonction qui résout le problème de Dirichlet dont on s'occupe, fonction qu'il s'agit de déterminer par ses valeurs limites sur C.

Les deux fonctions $g + \log r$ et v sont harmoniques dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, y compris le pôle; par suite, en vertu de la formule (1) (p. 232), on a ([2])

$$\int_C \left[(g + \log r)\frac{dv}{dn} - v\frac{d(g + \log r)}{dn}\right] ds = 0.$$

La fonction g est nulle sur C; aussi, la combinaison de cette formule et de la relation (3) (p. 234) donne l'égalité

$$v(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C v\frac{dg}{dn}\,ds,$$

qui résout le problème de Dirichlet.

([1]) La fonction de Green g garde la même valeur, lorsqu'on échange entre elles les coordonnées (x_0, y_0) du pôle et celles du point variable de $\mathfrak{D}$ dont g dépend; ainsi l'on a

$$g(x, y; x_0, y_0) = g(x_0, y_0; x, y)$$

(on suppose les points x_0, y_0 et x, y intérieurs à $\mathfrak{D}$).

La démonstration de cet important théorème, énoncé par Green et établi par Riemann, repose sur la formule de Green (p. 231).

Cf. RIEMANN-HATTENDORF, *Schwere, Elektricität und Magnetismus*, 1876. — HARNACK, *Grundlagen, etc.*, p. 72. — POINCARÉ, *Potentiel newtonien*, p. 154 et 164. — J. RIEMANN, *A. E. N.*, 1888, p. 401. — PARAF, *A. T.*, 1892, H., p. 31.

Relativement à l'existence des valeurs limites des dérivées partielles de g sur C, *cf.* LIAPOUNOFF, *J. M.*, 1898, p. 307.

([2]) Ces calculs supposent, avons-nous dit, que $\frac{dv}{dn}$ et $\frac{dg}{dn}$ vérifient sur C certaines conditions; elles sont certainement satisfaites si les fonctions v et g sont harmoniques un peu au delà de C.

Ainsi *le problème de Green et celui de Dirichlet sont équivalents* [1]; toutefois, en changeant la forme de l'énoncé de l'un de ces problèmes, on en facilite parfois la solution [2].

316. La théorie du *prolongement analytique,* exposée au Chapitre V, s'applique presque sans modification aux fonctions harmoniques.

Considérons une fonction de deux variables, uniforme et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant l'équation de Laplace *dans le voisinage d'un point* (x_0, y_0). On peut regarder cette fonction comme définie soit par les valeurs qu'elle prend le long d'un contour fermé arbitraire entourant ce point (p. 246), soit par une série de polynomes harmoniques homogènes ou une série convenable de puissances; dans tous les cas, elle est représentable par une série de l'un ou l'autre de ces types.

Désignons par $\mathfrak{P}_0(x, y \mid x_0, y_0)$ cette série ou *élément de fonction,* et par $\mathfrak{D}_0$ sa région de convergence. Une transformation linéaire permet de substituer à cet élément, dans le voisinage de tout point (x_1, y_1) intérieur à $\mathfrak{D}_0$, une autre série de même type $\mathfrak{P}_1(x, y \mid x_1, y_1)$, convergente dans un certain domaine $\mathfrak{D}_1$. Les séries $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{P}_1$ ont même valeur dans la région δ commune aux domaines $\mathfrak{D}_0$ et $\mathfrak{D}_1$; si le domaine $\mathfrak{D}_1$ sort de $\mathfrak{D}_0$, on peut regarder la fonction définie dans $\mathfrak{D}_1$ par la série $\mathfrak{P}_1$ comme prolongeant hors de δ la fonction définie dans $\mathfrak{D}_0$ par la série $\mathfrak{P}_0$, et définie dans δ à la fois par $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{P}_1$.

De la série $\mathfrak{P}_1$ on déduira de même des séries $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, ...; de là une *chaîne de séries* qui définit et représente, dans un domaine

---

[1] Cette proposition est due à Riemann.

Non seulement on peut trouver la fonction de Green relative à tout domaine pour lequel on sait résoudre le problème de Dirichlet, mais le problème de Dirichlet étant résolu pour les domaines limités par un nombre fini de segments rectilignes, Harnack est parvenu à former la fonction de Green, relative à un domaine quelconque (*Grundlagen, etc.*, p. 71).

[2] Sur la fonction de Green relative au rectangle, *cf.* HARNACK, *Grundlagen,* p. 77; relative au parallélépipède rectangle, *cf.* RIEMANN-HATTENDORFF, *Schwere, etc.*, p. 84; relative à certains polyèdres, *cf.* APPELL, *A. M.*, t. VIII, p. 275 et RIQUIER, *Thèse*, 1886, p. 94.

d'un seul tenant pouvant se recouvrir plusieurs fois, une fonction uniforme ou *multiforme,* jouissant en tous ses points des mêmes propriétés que son élément initial et telle qu'un élément de la chaîne suffise à faire connaître tous les autres. C'est cette fonction que Weierstrass appelle *fonction harmonique*.

La définition par prolongement conduit à s'occuper des obstacles au prolongement, par suite, à étudier les points singuliers, les lignes singulières ou coupures, les espaces lacunaires ([1]). Qu'il s'agisse d'une fonction analytique de variable complexe ou d'une fonction harmonique, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit prolongeable au delà d'une coupure quelconque (Ire Partie, p. 317), d'une coupure analytique (p. 104) sont les mêmes ([2]); les fonctions harmoniques étant analytiques (variables réelles), les théorèmes de MM. Picard et Goursat (Ire Partie, p. 320, note 2) leur sont applicables. Par exemple, deux fonctions harmoniques, définies des deux côtés c et $\bar{c}$ d'un arc de courbe C, se pro-

---

([1]) Un point *singulier* pour une fonction harmonique est un point où elle cesse d'être *régulière* (p. 237 et 229). Il existe toujours de pareils points, car une fonction harmonique régulière dans tout le plan (y compris le point ∞) est une constante (p. 243).

Un point singulier (a, b) est un *pôle* pour une fonction harmonique uniforme $u(x, y)$ quand on peut trouver des polynomes homogènes $p_1, \ldots, p_n$ en nombre *limité* tels que la différence

$$u(x, y) - p_1\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) - \ldots - p_n\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$$

soit régulière au point (a, b). Dans le cas contraire, le point singulier est *essentiel*. Si ce point essentiel est *isolé,* on peut trouver une *série* de polynomes homogènes tels que la différence

$$u(x, y) - p_1\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) - \ldots - p_n\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) - \ldots$$

soit régulière au point (a, b).

([2]) En particulier, le prolongement *par symétrie* des fonctions harmoniques s'effectue comme celui des fonctions analytiques (p. 101). Ainsi une fonction, harmonique dans une aire et prenant, sur un arc régulier C de ligne analytique appartenant à sa frontière, des valeurs représentées par une fonction analytique du paramètre qui sert à définir les points de C, peut être prolongée au delà de C.

Quand la courbe C est formée de plusieurs arcs réguliers $c, c', \ldots$ de lignes analytiques, le prolongement est possible au delà de tous les points de C, sauf en général autour des *sommets,* c'est-à-dire des points communs aux lignes $c, c', \ldots$.

longent analytiquement l'une l'autre, lorsqu'elles ont même valeur sur C et que leurs dérivées normales, prises respectivement des côtés c et $\bar{c}$, sont égales et de signes contraires le long de C. Une fonction harmonique, affectée de n singularités (sans point commun entre elles), est la somme de n fonctions n'ayant chacune qu'une singularité (p. 119). Le théorème de M. Mittag-Leffler (p. 201) s'étend aux fonctions harmoniques uniformes, etc. ([1]).

Cette théorie du prolongement est applicable aux fonctions de 3 et de p variables ([2]). Quand ces fonctions sont multiformes, l'échange de leurs déterminations s'obtient en faisant décrire à la variable des courbes fermées entourant certaines *lignes* singulières ou de branchement, qui dans l'espace jouent le même rôle que les points critiques dans le plan ([3]).

On est ainsi amené à considérer des fonctions harmoniques *algébriques :* celles de trois variables sont des fonctions définies dans tout l'espace et n'ayant qu'un nombre fini de pôles ou de lignes de branchement, ces dernières étant de degré de multi-

---

([1]) *Cf.* PAINLEVÉ, *A. T.*, 1888, C., p. 75, 129, etc. — STAHL, *J. de Crelle*, t. 79, p. 265. — BRUNS, *J. de Crelle*, t. 81, p. 349. — APPELL, *A. M.*, t. IV, p. 325 et t. VIII, p. 265; *J. M.*, 1887, p. 1. — PICARD, *Analyse*, t. II, p. 52 et 269.

([2]) Par exemple, M. Appell (*loc. cit.*) a étudié les fonctions harmoniques uniformes à trois variables qui ont trois groupes de périodes simultanées.

([3]) Comme exemple simple de fonction multiforme de trois variables, M. Appell (*M. A.*, t. XXX, p. 155) considère l'expression

$$u(x, y, z) = \frac{a}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}} + \frac{a_1}{\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(z-\gamma_1)^2}}.$$

Quand les constantes $a, a_1, \alpha, \alpha_1, \ldots, \gamma_1$ sont réelles, elle représente une fonction *uniforme,* ayant comme pôles les points (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Quand les constantes a et a_1, α et α_1, ... ont des valeurs imaginaires conjuguées, elle définit une fonction réelle *multiforme,* dont les déterminations s'échangent lorsqu'on décrit un contour fermé traversant l'aire du cercle

$$\begin{matrix} (x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2-(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)=0 \\ \alpha''(x-\alpha')+\beta''(y-\beta')+\gamma''(z-\gamma')=0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha=\alpha'+i\alpha'' \\ \beta=\beta'+i\beta'' \\ \gamma=\gamma'+i\gamma'' \end{pmatrix},$$

et entourant sa circonférence : cette circonférence est une ligne singulière.

Cf. aussi SOMMERFELD, *Proceedings of the London, M. S.*, 1896-1897, p. 395.

plicité fini. Pour séparer leurs diverses déterminations, on peut, par analogie avec les feuillets plans de Riemann, considérer un espace riemannien dans lequel elles seront *uniformes* et continues; cet espace sera formé par plusieurs espaces distincts, tels que l'on passe de l'un à l'autre suivant des lois définies ([1]).

§ II. — Les fonctions harmoniques et les fonctions analytiques.

Dès l'Introduction, le lien entre les fonctions harmoniques de deux variables réelles et les fonctions analytiques d'une variable complexe a été mis en évidence : à une fonction harmonique dans un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, il suffit d'associer par le symbole i la fonction harmonique complémentaire pour obtenir une fonction $f(z)$ analytique dans $\mathcal{D}$ (Ire Partie, p. 51).

Cette proposition montre l'importance du rôle que joue le problème de Dirichlet dans la Théorie des fonctions analytiques : en particulier, sa résolution apprend que l'on peut choisir *arbitrairement* les valeurs de la *partie réelle* de $f(z)$ sur la frontière de $\mathcal{D}$ (p. 59), et que cette suite de valeurs détermine complètement la fonction $f(z)$ dans tout le domaine $\mathcal{D}$, si l'on se donne de plus sa valeur en un point intérieur à $\mathcal{D}$ (p. 246 et Ire Partie, p. 51).

Ici, nous reviendrons seulement, en nous plaçant au point de vue de Riemann, sur la possibilité du développement des fonctions analytiques en série de Taylor.

317. Théorème I. — *L'association par le symbole i de deux fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$ harmoniques dans le voisinage de l'origine et complémentaires donne une fonction développable en série suivant les puissances de $x + iy$.*

En effet, développons d'abord, en série de polynomes homogènes, chacune des fonctions u et v (p. 239); on a, en désignant

([1]) Par exemple, soit une fonction algébrique à n branches. Prenons n exemplaires de l'espace ordinaire; marquons sur chacun d'eux les lignes de branchement et tendons des membranes entre ces lignes. L'espace de Riemann, relatif à la fonction considérée, s'obtient en coupant chaque exemplaire de l'espace le long de ces membranes, et en les croisant de façon que l'échange des espaces se fasse dans des conditions convenables (*cf.* Sommerfeld, *loc. cit.*, p. 397).

par α_n, β_n, δ_n, ε_n des nombres définis plus haut dépendant des valeurs des fonctions u et v sur une circonférence entourant l'origine,

$$u = \sum [\alpha_n \pi_n(x, y) + \beta_n \omega_n(x, y)], \qquad v = \sum [\delta_n \pi_n(x, y) + \varepsilon_n \omega_n(x, y)].$$

Les fonctions u et v étant complémentaires, la première des équations de Cauchy-Riemann donne

$$\sum \left(\alpha_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + \beta_n \frac{\partial \omega_n}{\partial x}\right) = \sum \left(\delta_n \frac{\partial \pi_n}{\partial y} + \varepsilon_n \frac{\partial \omega_n}{\partial y}\right),$$

puisqu'il suffit, pour dériver les séries u et v, de les dériver terme par terme (p. 242).

Les polynomes π_n et ω_n sont aussi complémentaires; par suite, la dernière égalité peut s'écrire

$$\sum \left(\alpha_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + \beta_n \frac{\partial \omega_n}{\partial x}\right) = \sum \left(-\delta_n \frac{\partial \omega_n}{\partial x} + \varepsilon_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x}\right),$$

ce qui montre que les coefficients α_n et β_n sont respectivement égaux à ε_n et $-\delta_n$. Donc, si l'on pose

$$\alpha_n - i\beta_n = \gamma_n, \qquad r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = x + iy = z,$$

il vient bien

$$u + iv = \sum (\alpha_n - i\beta_n)(\pi_n + i\omega_n) = \sum \gamma_n z^n,$$

puisque l'on a

$$\pi_n(x, y) = r^n \cos n\varphi, \qquad \omega_n(x, y) = r^n \sin n\varphi.$$

318. Théorème II. — *Réciproquement, une série entière convergente à l'origine*

$$\mathfrak{P}(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots$$

peut être mise, dans le voisinage de l'origine, sous la forme $u(x, y) + i\, v(x, y)$, u et v désignant des fonctions harmoniques dans le voisinage de l'origine et complémentaires.

En effet, soit

$$\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n, \qquad z = x + iy = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

On a, pour les valeurs de r inférieures à un nombre fixe,

$$\mathfrak{P}(z) = \sum r^n(\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi) + i\sum r^n(\beta_n \cos n\varphi + \alpha_n \sin n\varphi).$$

Par suite, si l'on pose (p. 239)

$$r^n \cos n\varphi = \pi_n(x, y), \qquad r^n \sin n\varphi = \omega_n(x, y),$$

il vient

$$\mathfrak{P}(z) = \sum(\alpha_n \pi_n - \beta_n \omega_n) + i\sum(\beta_n \pi_n + \alpha_n \omega_n) = u + iv,$$

en désignant par u et v des séries absolument et uniformément convergentes dans le voisinage de l'origine (p. 242).

Pour dériver ces séries, il suffit de les dériver terme par terme; dès lors, comme les polynomes π_n et ω_n sont harmoniques complémentaires, il en est de même des fonctions u et v.

319. Ajoutons quelques considérations sur les fonctions analytiques de *plusieurs* variables complexes, lorsqu'on les regarde comme définies par des équations aux dérivées partielles.

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des variables réelles en nombre pair, u et v des fonctions de ces variables, *continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre* à l'intérieur d'un domaine $\mathfrak{D}$. Associons par le symbole i les variables x_k et y_k de même indice, ainsi que les fonctions u et v. A quelles conditions la fonction ainsi obtenue

$$w = u(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + i\,v(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$
$$(z_k = x_k + iy_k)$$

est-elle monogène dans $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire a-t-elle des dérivées partielles par rapport à $z_1, \ldots, z_n$, indépendantes de la manière dont les accroissements $\Delta z_1, \ldots, \Delta z_n$ de ces variables tendent vers zéro?

Théorème. — *Pour que la combinaison $u + iv$ soit monogène dans $\mathfrak{D}$, il faut et il suffit que les fonctions u et v y satisfassent aux équations de Cauchy-Riemann généralisées*

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

En effet, nous avons établi cette proposition pour $n = 1$, lorsque l'accroissement Δz de la variable indépendante tend vers zéro en

suivant une courbe quelconque *qui a une tangente* (c'est l'hypothèse de Riemann, *cf.* Ire Partie, p. 48, texte) et même une courbe *absolument quelconque* (Ire Partie, p. 49, note). Reprenons cette démonstration (cette fois sans considérer à part le cas particulier examiné par Riemann) en l'étendant aux fonctions de n variables.

Les conditions (A) *sont nécessaires.* — En effet, en vertu des hypothèses sur la continuité des dérivées, l'accroissement Δw de la fonction w correspondant à des accroissements $\Delta z_1, \ldots, \Delta z_n$ des variables peut s'écrire

$$\Delta w = \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + \varepsilon_k\right)\Delta x_k + \left(\frac{\partial u}{\partial y_k} + \eta_k\right)\Delta y_k + i\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_k} + \varepsilon'_k\right)\Delta x_k + \left(\frac{\partial v}{\partial y_k} + \eta'_k\right)\Delta y_k\right]\right\},$$

ε_k, η_k, ε'_k, η'_k désignant des nombres qui tendent uniformément vers zéro avec les Δz_k dans le voisinage de tout point intérieur au domaine $\mathfrak{O}$. Il faut, en particulier, que $\frac{\Delta w}{\Delta z_1}$ ait une limite fixe quand, $\Delta z_2, \ldots, \Delta z_n$ étant nuls, Δx_1 et Δy_1 tendent vers zéro de façon que leur quotient ait une limite déterminée quelconque m; par suite, le rapport

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + m\dfrac{\partial u}{\partial y_1} + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1} + m\dfrac{\partial v}{\partial y_1}\right)}{1 + im}$$

doit être indépendant de m, ce qui entraîne les deux premières relations (A), et dès lors, d'après un raisonnement évident, les $2n$ relations (A).

Les conditions (A) *sont suffisantes.* — En effet, pour rechercher la dérivée partielle de w par rapport à z_1, on doit d'abord annuler dans Δw les accroissements $\Delta z_2, \ldots, \Delta z_n$. Introduisons cette hypothèse dans l'expression de Δw donnée ci-dessus, puis transformons-la à l'aide des relations (A); il vient

$$\frac{\Delta w}{\Delta z_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right)(\Delta x_1 + i\,\Delta y_1) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon'_1)\,\Delta x_1 + (\eta_1 + i\eta'_1)\,\Delta y_1}{\Delta x_1 + i\,\Delta y_1}.$$

A tout nombre positif α, si petit soit-il, on peut faire corres-

pondre un nombre positif h tel que ε_1, ε'_1, η_1, η'_1 aient leurs modules inférieurs à α dans l'ensemble $|\Delta x_1| < h$, $|\Delta y_1| < h$, en tout point $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathfrak{D}$; on a, par suite, dans cet ensemble,

$$\left|\frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon'_1)\,\Delta x_1 + (\eta_1 + i\eta'_1)\,\Delta y_1}{\Delta x_1 + i\,\Delta y_1}\right| < 4\alpha.$$

Donc, en tout point de $\mathfrak{D}$, $\dfrac{\Delta w}{\Delta z_1}$ tend vers la limite bien déterminée $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial v}{\partial x_1}$, quelle que soit la manière dont Δz_1 tende vers zéro.

320. Supposons maintenant que les fonctions

$$u(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \quad \text{et} \quad v(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

aient des dérivées partielles du *second ordre*. Il résulte des relations (A) que, si la combinaison $u + iv$ est monogène, l'expression

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dy_k - \frac{\partial u}{\partial y_k}\,dx_k\right)$$

est une différentielle exacte; ceci entraîne les n^2 équations

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k\,\partial y_l} = 0,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial y_l} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_k\,\partial x_l} = 0,\end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait aussi obtenir directement en dérivant les relations (A).

Cette remarque aide à comprendre les difficultés que présente l'extension des procédés de Riemann à l'étude des fonctions analytiques de *plusieurs* variables, puisqu'elle doit être précédée de celle de fonctions satisfaisant à la fois aux n^2 équations (B), c'est-à-dire à n équations de Laplace et à $n(n-1)$ autres équations (¹).

(¹) Considérons par exemple les fonctions de deux variables complexes. Leur étude suppose celle des fonctions biharmoniques à quatre variables et, dès lors, fait intervenir une attraction en raison inverse du cube de la distance s'exerçant dans l'espace à quatre dimensions, de même que l'étude des fonctions d'une

De pareilles fonctions sont dites *biharmoniques*. Ainsi une fonction de $2n$ variables $u(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, continue dans un domaine ainsi que ses dérivées du premier ordre et ayant des dérivées secondes, est *harmonique* dans ce domaine lorsqu'à son intérieur elle satisfait à l'équation de Laplace généralisée

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\right) = 0;$$

elle y est *biharmonique*, quand elle satisfait aux relations (B).

Pour $n > 1$, ce n'est plus la fonction harmonique qui est intéressante, c'est la fonction biharmonique; car c'est elle qui est la partie réelle (et la partie imaginaire) d'une fonction analytique de variables complexes.

D'après les équations (B), toute fonction biharmonique est harmonique.

§ III. — Les fonctions analytiques et la représentation conforme d'une aire plane sur une aire plane.

321. Deux surfaces peuvent être représentées l'une sur l'autre d'une infinité de manières. Riemann a remarqué que la détermination de l'une des lois de transformations de domaine plan en domaine plan, *la transformation conforme*, revenait à la définition d'une fonction analytique; et réciproquement. Aussi l'égalité

$$f(x + iy) = u + iv,$$

lui a-t-elle servi à définir une représentation d'un plan (x, y) sur

---

variable complexe se ramène à l'étude d'une attraction en raison inverse de la distance (n° 331).

Entre les deux problèmes la différence est profonde : d'après le principe de Dirichlet, il existe bien une fonction harmonique et une seule, qui prend sur la frontière d'un domaine à quatre dimensions, une suite continue de valeurs données (p. 69, note), mais cette fonction en général n'est pas *biharmonique*. Aussi, il est en général impossible de construire une fonction de $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ qui n'ait pas de singularités dans un domaine donné, et dont la partie réelle prenne sur sa frontière des valeurs données à l'avance. « C'est là qu'il faut chercher la véritable explication des différences si profondes que l'on observe entre les fonctions d'une variable et celles de deux variables, et en particulier de ce fait que l'on ne peut construire une fonction de deux variables ayant quatre périodes quelconques. » Poincaré, *A. M.*, t. II, p. 102.

Cf. aussi Poincaré, *A. M.*, t. XXII, p. 111. — Kronecker, *Monatsberichte der A. zu Berlin*, 1869, p. 159 (et 186).

un plan (u, v), et à créer par là une méthode *géométrique* d'introduction des fonctions analytiques ([1]).

Avant de l'exposer, rappelons quelques généralités sur la représentation des surfaces.

Une surface S est *représentée* sur une surface Σ, lorsqu'on a établi entre les points de S et de Σ une relation telle qu'à un point de S corresponde un ou plusieurs points de Σ, et inversement. Cette loi de correspondance peut être définie géométriquement ou analytiquement.

Par exemple, représenter la surface

$$(S) \qquad x = x(a, b), \qquad y = y(a, b), \qquad z = z(a, b)$$

sur la surface

$$(\Sigma) \qquad \xi = \xi(\alpha, \beta), \qquad \eta = \eta(\alpha, \beta), \qquad \zeta = \zeta(\alpha, \beta),$$

c'est faire correspondre un ou plusieurs systèmes de valeurs de (α, β) à un système de valeurs de (a, b) au moyen de relations

$$\alpha = g(a, b), \qquad \beta = h(a, b).$$

Dans la représentation de deux surfaces l'une sur l'autre, comme dans les transformations d'une surface, on se préoccupe de la conservation de certaines propriétés.

On peut voir si les *longueurs* (par suite, les aires ainsi que les angles) sont conservées, c'est-à-dire examiner si les deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre. Une telle représentation n'est pas en général possible ([2]).

On peut chercher à conserver les *aires*.

Enfin, on peut s'occuper des représentations qui conservent les *angles*, c'est-à-dire des représentations *conformes* ou *isogonales :* c'est d'elles que nous allons parler.

([1]) « Pour Riemann, l'image géométrique joue le rôle dominant. Une fonction n'est qu'une des lois d'après lesquelles les surfaces peuvent se transformer; on cherche à se représenter ces fonctions, non à les analyser. » POINCARÉ, *A. M.*, t. XXII, p. 7.

([2]) Il faudrait (*voir* page suivante) que l'on pût avoir identiquement $E = \mathcal{E}$, $F = \mathcal{F}$, $G = \mathcal{G}$. Ces égalités conduisent au théorème appelé *Theorema egregium* de Gauss, d'après lequel le produit des rayons de courbure principaux, aux points correspondants de deux surfaces applicables, a même valeur (la réciproque n'est pas vraie).

322. Pour représenter l'une sur l'autre d'une manière *conforme* les deux surfaces S et Σ, il faut déterminer les fonctions $g(a, b)$, $h(a, b)$ de telle manière que l'angle de deux lignes quelconques tracées sur S soit égal à l'angle des lignes correspondantes tracées sur Σ.

Supposons leurs éléments linéaires ds et $d\sigma$, mis sous la forme que leur a donnée Gauss, puis substituons aux paramètres α et β, dans l'expression des coordonnées de Σ, leurs valeurs en fonction de a et b (nous regardons alors comme points *correspondants* des surfaces ceux qui sont définis par *les mêmes valeurs* de a et b). On a ainsi des relations de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}(a, b)\,da^2 + 2\mathrm{F}(a, b)\,da\,db + \mathrm{G}(a, b)\,db^2,$$
$$d\sigma^2 = \mathcal{E}(a, b)\,da^2 + 2\,\mathcal{F}(a, b)\,da\,db + \mathcal{G}(a, b)\,db^2.$$

Pour la conservation des angles, il faut et il suffit que deux triangles *curvilignes* correspondants quelconques, mnp, $\mu\nu\pi$, de dimensions infinitésimales, aient leurs angles égaux, et par conséquent que les triangles *rectilignes* mnp, $\mu\nu\pi$ soient semblables. On écrira donc que la limite du rapport des longueurs des côtés mn et $\mu\nu$ ne change pas, quand ces côtés tournent autour des points fixes m et μ, ou bien encore que le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ a au point (a, b) une valeur indépendante de $\frac{da}{db}$. Donc, pour que la représentation soit conforme, il faut et il suffit que l'on détermine les fonctions g et h de façon à avoir en tout point (a, b)

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathcal{F}} = \frac{\mathrm{G}}{\mathcal{G}}.$$

Ce problème est en général possible, puisqu'il revient à la détermination de deux fonctions satisfaisant à deux équations.

Appliquons ces généralités d'abord à la représentation d'un plan (x, y) sur un plan (u, v), et ensuite au *problème des Cartes*.

Dans ces plans, on peut choisir comme paramètres (a, b), (α, β) les coordonnées cartésiennes elles-mêmes (x, y), (u, v) des points à transformer. On a ainsi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad d\sigma^2 = du^2 + dv^2,$$

et par suite le problème de la représentation conforme du premier plan sur le second revient à la détermination de deux fonctions

$$(1) \qquad u = g(x, y), \qquad v = h(x, y),$$

qui transforment $d\sigma^2$ en une expression $\mathcal{E}\,dx^2 + 2\mathcal{F}\,dx\,dy + \mathcal{G}\,dy^2$ telle que l'on ait

$$\mathcal{E} = \mathcal{G}, \qquad \mathcal{F} = 0.$$

En d'autres termes, la transformation (1) est conforme, si l'on détermine les fonctions g et h de façon que l'on ait

$$(2) \qquad du^2 + dv^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

C'est cette identité qui va servir à montrer le lien entre la théorie des fonctions analytiques et la représentation conforme.

323. Théorème. — *Toute représentation conforme d'un domaine plan sur un domaine plan donne naissance, par l'association des deux fonctions qui la déterminent, à une fonction analytique.*

En effet, soit une transformation définie par les relations (1); on la suppose conforme, ce qui entraîne l'identité (2) que l'on peut écrire sous la forme

$$(du + i\,dv)(du - i\,dv) = \lambda(dx + i\,dy)(dx - i\,dy).$$

Les différentielles du et dv, $du + i\,dv$, $du - i\,dv$ sont des fonctions linéaires en dx et dy; par suite, les deux membres de cette identité renferment, à un facteur près qui dépend seulement de x et y, les mêmes facteurs linéaires en dx et dy. Ceci exige que l'un des rapports

$$\frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy}, \quad \frac{du - i\,dv}{dx + i\,dy}$$

dépende seulement de x et y, et par suite (Ire Partie, p. 47) que l'une des deux combinaisons $u + iv$, $u - iv$, déduite des relations (1), soit une fonction analytique de $x + iy$.

On passe géométriquement de la première combinaison (u, v) à la seconde en prenant la symétrique, par rapport à l'axe Ou, de la première figure (u, v) transformée de la figure (x, y). Dans les

deux combinaisons, les sens des parcours et les sens de rotation des angles sont différents (Ire Partie, p. 56).

Réciproquement, toute transformation conforme peut être envisagée comme ayant son origine dans une fonction analytique.

En effet, la transformation (1) peut être regardée comme déduite de la considération de l'une des fonctions $u + iv$, $u - iv$; par ailleurs, nous venons de voir que l'une de ces deux fonctions est analytique, quand la transformation est conforme.

Remarque. — Nous savions déjà que toute fonction analytique conduisait à une représentation conforme (Ire Partie, p. 53).

324. *Faire la Carte géographique* d'une surface, c'est la *représenter* d'une manière quelconque sur un plan. Néanmoins, avec Lambert, Euler, Lagrange, Gauss [1] on réserve d'ordinaire le nom de *Cartes géographiques* aux représentations *conformes* d'une surface sur un plan : c'est d'elles que nous allons parler [2].

Le carré de l'élément linéaire du plan est $dx^2 + dy^2$; par suite faire la Carte d'une surface S, définie en coordonnées paramétriques (u, v), *c'est ramener son élément linéaire ds à la forme*

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{2}$$

x et y désignant les nouvelles coordonnées paramétriques. On dit

---

(1) LAMBERT, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik.* — EULER, *Acta A. S. Petropolitanæ*, 1778, t. I, p. 107, 133, 143. — LAGRANGE, *Ac. de Berlin*, 1779, p. 161 et 186 (*Œuvres*, t. IV, p. 637 et 664). — GAUSS (1822), *Œuvres*, t. IV, p. 193.

(2) Il y a d'autres systèmes de Cartes; par exemple, dans celui de l'État-Major français, on a cherché à *conserver les aires.*

Quant au système de projections stéréographiques, s'il remonte à Ptolémée qui avait prouvé que les cercles s'y transforment en cercles, il semble que ce géomètre ait ignoré la seconde propriété relative à la conservation des angles : aussi Lambert est bien le premier qui se soit placé en traitant du problème des Cartes au point de vue général de la représentation conforme.

alors que le *système* ou *réseau* (x, y) correspondant tracé sur la surface est orthogonal et isotherme ([1]).

La théorie des fonctions analytiques permet de déduire d'une solution du problème des Cartes toutes les autres solutions, sans intégration.

En effet, soit l'élément linéaire d'une surface ramené de deux manières différentes à la forme (2) de telle sorte que l'on ait

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + y^2), \qquad ds^2 = \lambda_1(x_1, y_1)(dx_1^2 + dy_1^2),$$

d'où l'on déduit

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\lambda_1(x_1, y_1)}{\lambda(x, y)}(dx_1^2 + dy_1^2). \tag{3}$$

([1]) Nous verrons plus loin (n° 332) qu'une *famille* de courbes planes

$$\varphi(\xi, \eta) = C$$

est regardée comme isotherme, lorsqu'on peut trouver une fonction de φ qui soit harmonique, ce qui revient à dire que la fonction φ doit satisfaire à une certaine équation aux dérivées partielles. Une famille de courbes *tracées sur une surface* est dite isotherme, quand elle peut être *représentée* dans le plan par une famille d'isothermes.

La théorie du *facteur intégrant* permet de passer d'une infinité de manières de la forme $\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2$ à la forme (2). En effet, partons de la décomposition en facteurs

$$ds^2 = \left(\sqrt{\mathcal{E}}\,du + \frac{\mathcal{F} + i\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{E}}}\,dv\right)\left(\sqrt{\mathcal{E}}\,du + \frac{\mathcal{F} - i\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{E}}}\,dv\right) \qquad (\mathcal{H}^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 \gtrless 0).$$

Les parenthèses deviennent chacune des différentielles exactes, lorsqu'on les multiplie par des facteurs intégrants quelconques μ et ν; on peut donc les égaler respectivement à $\mu^{-1}\,d\xi$ et $\nu^{-1}\,d\eta$. On a ainsi

$$ds^2 = (\mu\nu)^{-1}\,d\xi\,d\eta,$$

μ et ν étant des fonctions de u et v, et dès lors de ξ et η. Il suffit alors de passer des coordonnées symétriques (ξ, η) aux coordonnées (x, y) définies par les égalités

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = x - iy,$$

pour obtenir la forme (2).

Ainsi le problème de la Carte d'une surface sur un plan est ramené à la recherche d'un facteur intégrant; par suite, il est possible soit quand la surface est analytique, soit lorsque les fonctions $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont des fonctions continues de u et v ayant des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à v, soit même dans des cas plus généraux (Darboux, *Théorie des surfaces,* t. IV, p. 367, note de M. Picard).

Le facteur $\lambda(x, y)$ dépend de x_1 et y_1, puisque x et y, x_1 et y_1 sont des fonctions de u et v; par suite, la relation (3) définit une transformation conforme d'un plan (x_1, y_1) sur un plan (x, y). Nous venons de voir (p. 265) que de pareilles transformations résultent toutes de l'une des égalités

$$(4) \qquad x + iy = f(x_1 + iy_1), \qquad x + iy = f(x_1 - iy_1),$$

où la fonction analytique f est totalement arbitraire. Par suite, d'une solution du problème des Cartes définie par les relations (1), on en déduit toutes les autres, en introduisant une fonction analytique arbitraire f, et en égalant respectivement entre elles, dans les équations (4), les parties réelles et les parties imaginaires [1].

On peut aller plus loin. La connaissance d'un seul système orthogonal et isotherme sur une surface permet d'y tracer non seulement tous les systèmes orthogonaux et isothermes, mais une infinité d'autres systèmes orthogonaux.

En effet, ce système isotherme connu permet de faire sur un plan la Carte de la surface, avec conservation des angles. Dans ce plan, il est facile de tracer des systèmes orthogonaux; les réseaux correspondants sur la surface seront aussi orthogonaux.

325. Remarquons en terminant que les théorèmes ci-dessus (p. 264) auraient pu s'énoncer comme il suit :

Toute fonction analytique donne naissance dans le plan à

---

(1) *Exemple.* — Sur une surface de révolution, les méridiens et les parallèles forment un système isotherme.

En effet, étant donnée la surface

$$X = u \cos v, \qquad Y = u \sin v, \qquad Z = f(u),$$

il suffit d'effectuer la quadrature

$$dx = \frac{\sqrt{1 + f'^2(u)}}{u} du,$$

et de poser $v = y$ pour ramener son élément linéaire à la forme

$$ds^2 = \varphi(x)\,(dx^2 + dy^2)$$

caractéristique du système isotherme.

On sait donc résoudre dans sa généralité le problème des Cartes pour les surfaces de révolution.

un système orthogonal et isotherme; réciproquement, un pareil système peut être considéré comme ayant son origine dans une fonction analytique.

En effet, la transformation $u + iv = f(x + iy)$ met l'élément $du^2 + dv^2$ sous la forme (2).

Réciproquement, cette forme peut être considérée comme obtenue par l'une des transformations $u + iv = f(x \pm iy)$ (1).

326. Riemann a déduit du principe de Dirichlet une proposition fondamentale qui précise la correspondance que l'on peut obtenir, par l'intermédiaire des fonctions analytiques, entre deux domaines plans. De là un nouveau lien entre ce principe, la théorie des fonctions analytiques, et celle de la représentation conforme, comme nous allons l'exposer.

Théorème. — *Étant donnés deux domaines plans limités quelconques $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$, à connexion* simple, *on peut toujours trouver une fonction analytique uniforme permettant de les représenter l'un sur l'autre d'une manière biunivoque et conforme.*

Des transformations déjà rencontrées (Ire Partie, p. 73, 79, 173, etc.; IIe Partie, p. 100, 115, etc.) (2) ont fourni des cas parti-

---

(1) Un système (x, y) orthogonal et isotherme tracé dans le plan (ou sur la surface S) *divise le plan* (ou la surface) *en carrés infiniment petits :* voici en quel sens.

Soient A et B deux familles de courbes orthogonales tracées dans le plan (ou sur la surface S); a_0 et a_1 deux courbes quelconques de la première famille, b_0 et b_1 deux courbes de la seconde. Si elles déterminent un quadrilatère MNPQ, il est en général possible d'associer aux lignes a_0, a_1, b_0, b_1 des lignes infiniment voisines a'_0, a'_1, b'_0, b'_1 appartenant aux familles A et B et telles que des quatre rectangles formés dans le voisinage des points M, N, P, Q, *trois* soient des *carrés* infiniment petits. La condition nécessaire et suffisante pour que *le quatrième rectangle soit aussi un carré*, c'est que l'élément linéaire du plan (ou de la surface) ait la forme (2). (*Cf.* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 146.)

(2) Parmi elles, rappelons la transformation $\tau = e^x$, qui fait correspondre à un rectangle de hauteur 2π dont les côtés sont parallèles aux axes une *couronne circulaire :* ainsi elle donne un exemple de représentation d'aire *à connexion double* sur un rectangle. De même, la transformation (5) (Ire Partie, p. 79) fait

culiers de ce type de correspondance (¹). La proposition de Riemann généralise ces résultats en apprenant à représenter l'un sur l'autre, d'une manière biunivoque et conforme (pour abréger, nous dirons seulement de *représenter*), des domaines quelconques du type ci-dessus, de telle sorte même qu'à un point particulier pris arbitrairement *à l'intérieur* de l'un des domaines $\mathfrak{D}$ corresponde un point arbitraire à l'intérieur de $\mathfrak{D}_1$, et qu'à un point particulier arbitraire de la *frontière* de $\mathfrak{D}$ corresponde un point arbitraire de la frontière de $\mathfrak{D}_1$ (²).

Avant de former effectivement une fonction analytique qui donne cette représentation, faisons quelques remarques. Désormais, nous regarderons la lettre x comme représentant une variable complexe $\xi + i\eta$.

1° Quand on sait *représenter* (au sens ci-dessus) deux domaines $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$ sur un domaine *particulier* $\mathfrak{E}$, on peut représenter $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{D}_1$; car si les relations $\tau = g(x)$, $y = \varphi(\tau)$ établissent une représentation de $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{E}$, et de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{D}_1$, la fonction $y = \varphi(g(x))$ permet de représenter $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{D}_1$.

Par suite, le problème général se ramène à la représentation d'un domaine donné quelconque $\mathfrak{D}$ sur un domaine particulier $\mathfrak{E}$ *choisi arbitrairement*. D'ordinaire, on prend comme domaine $\mathfrak{E}$ soit le demi-plan nord, soit la surface d'un cercle ayant l'origine

---

correspondre l'aire comprise entre deux ellipses homofocales à une couronne circulaire.

En général, *deux domaines à connexion multiple, même limités chacun par un même nombre de contours, ne sont pas représentables l'un sur l'autre.* Dans un important Mémoire (*J. de Crelle*, t. 83, 1877), M. Schottky a examiné à quelles conditions cette représentation est possible et il a formé les fonctions qui alors la réalisent. Son travail a été commenté et complété par M. Le Vavasseur (*A. T.*, 1902, p. 58). Disons seulement qu'à un domaine plan percé de p trous, envisagé comme ayant une face supérieure et une face inférieure, correspond une courbe algébrique de genre p, et que la question de la représentation de deux domaines revient à celle de l'identité des deux classes des courbes algébriques qui leur correspondent. *Cf.* aussi PICARD, *Analyse*, t. II, p. 285 et 496.

(¹) On trouvera, dans les Mémoires de M. Schwarz que nous avons signalés (*Œuvres*, t. II, p. 144, etc.), plusieurs exemples intéressants de représentation conforme relatifs à des aires limitées par des arcs de cercle. *Cf.* aussi DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Iʳᵉ Partie, p. 176.

(²) RIEMANN, *Dissertation inaugurale* (*Œuvres*, trad. Laugel, p. 49).

pour centre, suivant qu'il s'agit d'un calcul à effectuer ou d'un théorème à établir ([1]).

2° Si le problème de la représentation d'un domaine $\mathfrak{D}$ sur un domaine $\mathfrak{C}$ a une solution, *il en a une infinité*.

En effet, imaginons qu'une relation $\tau = g(x)$ établisse une correspondance biunivoque et conforme entre le domaine $\mathfrak{D}$ et le demi-plan nord : la substitution bilinéaire (Ire Partie, p. 75),

$$\left(\tau, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \qquad \left(\begin{matrix} a,\ b,\ c,\ d \text{ réels} \\ ad-bc>0 \end{matrix}\right)$$

transforme le demi-plan nord en lui-même ([2]), et par suite la relation

$$\tau = \frac{a\,g(x)+b}{c\,g(x)+d}$$

donne l'expression d'une infinité de fonctions analytiques uniformes qui représentent le domaine $\mathfrak{D}$ sur le demi-plan nord.

Elle renferme *trois constantes arbitraires :* on peut les déterminer ou bien en fixant la correspondance entre deux points choisis arbitrairement l'un sur le demi-plan nord, l'autre sur l'axe réel, et d'autre part, un point intérieur à $\mathfrak{D}$ et un point frontière de $\mathfrak{D}$; ou bien encore en fixant la correspondance entre trois points donnés de l'axe réel et trois points arbitraires situés sur la frontière de $\mathfrak{D}$.

3° Nous allons prendre comme domaine $\mathfrak{C}$ le cercle décrit de l'origine comme centre avec l'unité pour rayon, et nous désignerons par $\tau = g(x)$ la relation qui permet de représenter $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{C}$ ([3]). Puis nous décomposerons en deux parties le problème

---

([1]) Sur la marche à suivre pour former la fonction qui permet de représenter $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{C}$, le problème de Dirichlet étant supposé résolu, *voir* LE VAVASSEUR, *A. T.*, 1902, p. 55.

Quant au problème de la représentation d'une surface de Riemann sur un polygone, *cf.* PICARD, *Analyse*, t. II, p. 485.

([2]) On démontre même que cette transformation est la ***plus générale*** parmi celles qui réalisent la représentation conforme du demi-plan nord sur lui-même. Par suite, la relation que nous allons former définit ***toutes*** les fonctions conduisant à la représentation de $\mathfrak{D}$ sur le demi-plan nord.

([3]) A cause de la correspondance biunivoque qui doit exister entre les domaines $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}$, la dérivée $g'(x)$ de la fonction analytique $g(x)$ ne doit s'annuler en aucun point x_0 intérieur au domaine $\mathfrak{D}$; sinon il y aurait dans le

de Riemann, en ce sens que l'on cherchera d'abord à déterminer la fonction $g(x)$ de manière qu'elle représente l'*intérieur* de $\mathfrak{D}$ sur l'*intérieur* de $\mathfrak{C}$, et que l'on examinera ensuite si, par continuité, la relation obtenue établit aussi une correspondance biunivoque et continue entre les deux *frontières*.

La méthode que nous suivrons pour sa solution repose sur la formation de la *fonction de Green* relative au domaine $\mathfrak{D}$ et au point x_0 de $\mathfrak{D}$ (considéré comme pôle) que l'on veut faire correspondre au centre du cercle $\mathfrak{C}$.

327. Ces remarques faites, venons à la démonstration du théorème.

I. *On peut établir une correspondance biunivoque et conforme entre les points* INTÉRIEURS *aux domaines* $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{C}$.

En effet, soient r et φ les coordonnées polaires des points de $\mathfrak{D}$ relativement au point x_0 (de coordonnées rectangulaires ξ_0, η_0) pris comme pôle. La solution du problème de Dirichlet permet de former une fonction $u_1(\xi, \eta)$ harmonique dans $\mathfrak{D}$ et prenant sur la frontière C de $\mathfrak{D}$ la suite continue de valeurs réelles $-\log r$ (r se rapportant aux distances de x_0 aux divers points de C). La fonction harmonique complémentaire de u_1 peut être représentée par l'intégrale

$$v_1 = \int_{\xi_0\eta_0}^{\xi\eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u_1}{\partial \eta} d\xi \right) + k \qquad (k \text{ constante arbitraire}),$$

prise le long d'un chemin situé tout entier à l'intérieur de $\mathfrak{D}$; elle est continue dans $\mathfrak{D}$.

De ces fonctions u_1 et v_1 déduisons-en deux autres, u et v, définies par les égalités

$$u(\xi, \eta) = u_1(\xi, \eta) + \log r, \qquad v(\xi, \eta) = v_1(\xi, \eta) + \varphi;$$

la première est au signe près la *fonction de Green* relative au domaine $\mathfrak{D}$ et au pôle x_0. Dans le domaine $\mathfrak{D}$, ces fonctions u

---

voisinage de x_0 au moins deux points x pour lesquels la fonction τ prendrait la même valeur (p. 8 et 12).

De même, si l'on désigne par $\gamma(\tau)$ la fonction inverse de $g(x)$, $\gamma'(\tau)$ ne s'annulera pas dans $\mathfrak{C}$.

et v sont aussi harmoniques (sauf au pôle x_0), et elles sont complémentaires [1] : la fonction u s'annule sur C, la fonction v deviendrait uniforme par une coupure allant de x_0 à un point quelconque de C.

Je dis que la fonction analytique uniforme $\tau = e^{u+iv}$ (τ ne change pas quand φ augmente de 2π) réalise la transformation demandée.

Pour l'établir, considérons la famille de courbes C_α définie par l'égalité

$$u(\xi, \eta) = \alpha,$$

α désignant un paramètre négatif.

1° La fonction u s'annule sur la frontière C de $\mathfrak{D}$; aussi la courbe C_α qui correspond à la valeur $\alpha = 0$ se confond avec C. De plus, la fonction u est négative à l'intérieur de C (p. 251) et elle varie d'une façon continue de $-\infty$ à zéro, entre x_0 et C; donc, pour toute valeur négative de α, on a une courbe C_α intérieure à C.

2° Les courbes C_α sont fermées.

3° Elles entourent toutes le point x_0. Car si l'une d'elles C_α ne renfermait pas ce point à son intérieur, la fonction u serait harmonique dans *tout* le domaine $\mathfrak{D}_\alpha$ de frontière C_α; dès lors, puisqu'elle prendrait la même valeur α sur toute sa frontière C_α, elle serait constante dans $\mathfrak{D}_\alpha$ (p. 245), et par suite constante dans $\mathfrak{D}$.

D'après le même raisonnement, les courbes C_α ne peuvent se couper.

Cela posé, faisons parcourir au point $x (x = \xi + i\eta)$ l'une de ces courbes C_α. Le point $\tau (\tau = e^{u+iv})$ décrira une circonférence correspondante Γ_α ayant l'origine pour centre (puisque l'on a $|\tau| = e^\alpha$) et un rayon inférieur à l'unité (puisque α est négatif). Quand le point x décrit la courbe C_α en entier, d'un mouvement continu et en allant toujours dans le sens positif, le point τ parcourt, dans les mêmes conditions, la circonférence Γ_α, car nous allons voir que son argument v croît alors d'une façon continue et augmente de 2π.

---

[1] On dit souvent qu'une fonction $\varphi(\xi, \eta)$ devient *logarithmiquement infinie* en un point (ξ_0, η_0) lorsque $\varphi(\xi, \eta) \pm \log\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$ reste holomorphe dans le voisinage de ce point. Ainsi toute fonction de Green est logarithmiquement infinie en son pôle (p. 251).

En effet, soit M un point de la courbe C_α : déplaçons-nous d'abord sur la normale en M à la courbe C_α vers l'intérieur (Ire Partie, p. 12), puis sur la tangente à cette courbe au même point dans le sens direct. Les égalités qui expriment que u et v sont des fonctions harmoniques associées conduisent, pour de pareils déplacements, à la relation

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dn} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dn} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{d\xi}{dn} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{d\eta}{dn} = -\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{d\eta}{ds} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{d\xi}{ds},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dn} = -\frac{dv}{ds}:$$

la première dérivée est prise dans le sens de la normale intérieure à la courbe C_α; dans la seconde, on regarde v comme une fonction de l'arc s de la courbe C_α, arc compté positivement dans le sens direct.

La fonction u diminue quand on se déplace sur la normale à la courbe C_α vers l'intérieur, puisqu'elle a une valeur plus petite lorsqu'on remplace C_α par une courbe intérieure à C_α; dès lors, sur cette courbe, $\frac{du}{dn}$ est négatif, et par suite $\frac{dv}{ds}$ est positif. On voit donc que la fonction v *augmente* avec s, c'est-à-dire lorsqu'on parcourt dans le sens direct la courbe C_α.

D'autre part, après une circulation complète du point (ξ, η) sur cette courbe, la fonction uniforme v_1 reprend sa valeur initiale, et l'angle φ croît de 2π. Donc, après cette circulation, v a augmenté de 2π, et par suite τ a fait un tour complet sur la circonférence de rayon e^α. Ainsi, les courbes $u(\xi, \eta) = \alpha$ et les circonférences $|\tau| = e^\alpha$ se correspondent d'une manière *biunivoque* quel que soit $\alpha (\alpha < 0)$; dès lors, il en est de même des domaines $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}$.

Enfin, la transformation définie par la fonction analytique considérée est bien *conforme*, car elle est biunivoque, et par suite la dérivée de τ n'est pas nulle dans le cercle $\mathfrak{C}$ (Ire Partie, p. 53) [1].

[1] Pour représenter sur un cercle le domaine $\mathfrak{D}_e$ *extérieur* à une courbe fermée, on peut soit ramener, par une inversion, ce cas à celui du texte, en substituant au domaine $\mathfrak{D}_e$ un domaine fermé (p. 61), soit opérer directement. Pour cela, ou bien on formera à peu près comme dans le texte la fonction de

II. *Cette correspondance biunivoque s'étend aux points des deux frontières.*

Traitons cette question délicate dans le cas particulier très simple où le contour C est formé d'*un seul* arc régulier de courbe analytique.

Alors, le long de C, la fonction $u_1(\xi, \eta)$ est une fonction analytique non seulement de ξ et η, mais aussi du paramètre qui sert à exprimer analytiquement les divers points de C; par suite elle peut être étendue un peu au delà de C (p. 105 et 254), et dès lors ses dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}$ sont déterminées sur C ([1]). On en déduit que la fonction v_1, définie par une intégrale où entrent ces dérivées, est aussi déterminée et continue sur C; par suite les frontières des deux domaines se correspondent d'une manière continue et biunivoque.

Remarquons enfin qu'en disposant convenablement de la constante k, on peut faire correspondre un point arbitraire de C à un point arbitraire de la circonférence du cercle $\mathfrak{C}$ ([2]).

Green qui permet la représentation cherchée, ou bien on appliquera, à l'aire extérieure à un contour polygonal fermé, la méthode donnée par Christoffel (*Annali di M.*, 1870) pour l'aire intérieure à ce polygone. *Cf.* HARNACK, *Grundlagen, etc.*, p. 154.

([1]) Posons toujours $\tau = e^{u+iv}$. On ne sait pas si la fonction de Green u, harmonique dans $\mathfrak{D}$ (sauf au pôle x_0) et continue sur C, a des dérivées sur C, et par suite si la fonction conjuguée v, harmonique dans $\mathfrak{D}$, est déterminée et *a fortiori* est continue sur C. Par suite, quand x tend vers un point de C, τ tend bien vers la circonférence du cercle $\mathfrak{C}$, mais une discussion est nécessaire, comme l'a montré Harnack, pour décider s'il tend vers un point *déterminé* de cette circonférence (*cf.* HARNACK, *Grundlagen, etc.*).

L'existence d'une fonction établissant une correspondance biunivoque et continue *entre les frontières* de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{C}$ a été étudiée dans le cas où la frontière C est formée soit d'un nombre fini d'arcs réguliers de courbes analytiques (*cf.* SCHWARZ, *J. de Crelle*, t. 70 et 74; HARNACK, *M. A.*, t. XXXV; PICARD, *Analyse*, t. II, p. 276), soit d'un nombre fini d'arcs de courbes ayant en chaque point une tangente déterminée et variant d'une manière continue, sauf en un nombre fini de points anguleux (PAINLEVÉ, *C. R.*, 1891, 1er semestre, p. 653; PARAF, *A. T.*, 1892, H.), soit enfin d'une courbe rectifiable, ou même de courbes plus générales (OSGOOD, *Transactions of the American M. S.*, 1900, p. 310).

([2]) Quand le domaine $\mathfrak{D}$ est un polygone ayant pour côtés des arcs de cercle en nombre fini, les fonctions $\tau = g(x)$ qui permettent de représenter ce polygone sur le cercle $\mathfrak{C}$ forment une classe spéciale de fonctions automorphes.

328. Nous venons de voir que si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour deux domaines plans simplement connexes $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$, on peut obtenir une solution de celui de Riemann et représenter $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{D}_1$. Inversement, *la théorie de la représentation conforme conduit à une solution du problème de Dirichlet*, valable pour tout domaine plan à connexion simple.

En effet, quand on sait représenter d'une manière conforme une aire simplement connexe $\mathfrak{D}$ sur une aire simplement connexe $\mathfrak{D}_1$, et de plus résoudre le problème de Dirichlet pour $\mathfrak{D}_1$, on peut le résoudre pour $\mathfrak{D}$ (p. 61) [1]. Or la solution du problème de Dirichlet dans le cas d'un cercle $\mathfrak{C}$ est facile (p. 237), et d'autre part, en s'inspirant des méthodes du prolongement par symétrie (p. 101), *M. Schwarz a donné le moyen de former*, INDÉPENDAMMENT DU PROBLÈME DE DIRICHLET [2], *une fonction permettant la représentation de* $\mathfrak{D}$ *sur* $\mathfrak{C}$. De là pour résoudre le problème de Dirichlet une méthode tout autre que celles exposées plus haut, applicable à un domaine plan quelconque $\mathfrak{D}$ simplement connexe.

Est-il possible d'en faire l'extension aux fonctions de TROIS *variables*, c'est-à-dire peut-on trouver une transformation T

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x, y, z), \\ y_1 &= y_1(x, y, z), \\ z_1 &= z_1(x, y, z) \end{aligned}$$

qui fasse correspondre l'un à l'autre deux domaines fermés *arbitraires de l'espace* $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$, de telle façon que la solution du problème de Dirichlet pour $\mathfrak{D}_1$ se ramène à la solution de ce problème pour $\mathfrak{D}$?

Il n'est pas nécessaire pour cela que la transformation T remplace une fonction $v_1(x_1, y_1, z_1)$ harmonique dans $\mathfrak{D}_1$ par une

---

(1) Ce théorème résume tout le rôle de la représentation conforme dans l'étude du problème de Dirichlet.

(2) M. Schwarz a traité cette question fondamentale d'abord dans l'hypothèse où $\mathfrak{D}$ est limité par des droites ou des arcs de cercles, puis dans des cas plus généraux. *Voir* une note ci-dessus (p. 57), et SCHWARZ, *Œuvres*, t. II, p. 144, etc. *Cf.* aussi l'exposé qu'en a donné M. Darboux (*Théorie des surfaces*, Ire Partie, p. 174).

fonction $v(x, y, z)$ harmonique dans $\mathcal{D}$ [1]; il suffit qu'à toute fonction harmonique $v_1(x_1, y_1, z_1)$ on puisse *faire correspondre*, par la transformation T, une fonction harmonique $v(x, y, z)$, et cela de manière que les valeurs de v_1 sur une surface quelconque du domaine $\mathcal{D}_1$ déterminent les valeurs de v sur la surface correspondante de $\mathcal{D}$.

On a donc à chercher une transformation T et une fonction $f(v_1, x, y, z)$ telles que, si l'on effectue la transformation T dans une fonction $v_1(x_1, y_1, z_1)$ harmonique dans $\mathcal{D}_1$, la fonction $v(x, y, z)$ transformée de $f(v_1, x, y, z)$ soit harmonique dans $\mathcal{D}$.

Ce problème a une solution bien connue quand il s'agit de certains domaines *particuliers* $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$, car l'inversion

$$x_1 = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad y_1 = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad z_1 = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

appliquée à la fonction

$$f(v_1, x, y, z) = \frac{v_1(x_1, y_1, z_1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = v(x, y, z),$$

remplit les conditions exigées (p. 62). Dès lors, au lieu de résoudre le problème de Dirichlet pour une surface, il suffit de le résoudre pour l'une quelconque des *surfaces inverses*.

Cette méthode ne peut être généralisée. En effet, M. Painlevé a prouvé que toute transformation T doit, pour répondre à la question, définir une représentation *conforme* des deux espaces (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) l'une sur l'autre [2]. D'autre part, en vertu d'un théorème de Liouville, *la transformation conforme* LA PLUS GÉNÉRALE DANS L'ESPACE *est constituée par l'inversion combinée*

---

(1) Dans l'espace, en dehors de la substitution

$$\big(x, y, z;\ a + l(\alpha x + \beta y + \gamma z),\ b + l(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z),\ c + l(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)\big)$$

il n'existe pas de transformation qui remplace une fonction harmonique $v_1(x, y, z)$, par une fonction harmonique $v(x, y, z)$.

Dans le plan, toute transformation *conforme* jouissait de cette propriété (p. 60).

(2) PAINLEVÉ, *Travaux des Facultés de Lille*, t. I, p. 5; 1889.

avec l'homothétie et le changement d'axes rectangulaires (¹). Or de pareilles transformations n'établissent pas de correspondance entre des domaines *arbitraires* $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$. Donc l'extension à l'espace du procédé de Riemann-Schwarz pour résoudre le problème de Dirichlet n'est possible que pour des domaines particuliers; à ce point de vue, il y a une différence profonde entre les fonctions de deux variables et celles de p variables ($p > 2$).

329. Quand une courbe *algébrique* $F(x, y) = 0$ est de *genre* 0 *ou* 1, une proposition remarquable due à Riemann apprend à exprimer les coordonnées x et y d'un point quelconque de cette courbe à l'aide de *fonctions méromorphes* très simples : ces fonctions sont des fractions rationnelles d'un paramètre τ ou des fonctions elliptiques de ce paramètre. Lorsque le genre de la relation algébrique $F(x, y) = 0$ surpasse l'unité, l'introduction des fonctions automorphes a permis à M. Poincaré de représenter encore les coordonnées x et y à l'aide de *fonctions uniformes* d'une variable (²). En langage géométrique, on peut dire qu'il existe

---

(¹) « J'ai obtenu, en profitant d'une sorte de hasard, la solution complète » du problème de l'extension au cas de trois dimensions de la question du tracé géographique, c'est-à-dire de la résolution de l'équation

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \lambda(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

« Jusqu'ici on savait que l'inversion donne une solution du problème; C'EST LA SEULE » (en y ajoutant évidemment la translation, la symétrie, l'homothétie). LIOUVILLE, Note VI de la *Géométrie* de Monge (5ᵉ édit. 1850, p. 609).

Le théorème de Liouville a été étendu par M. Darboux aux espaces à plus de trois dimensions : *toute transformation conforme dans l'hyperespace peut être obtenue par la combinaison de déplacements et d'inversions* (*A. E. N.*, 1878, p. 283).

Cf. aussi HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *J. E. P.*, XLIIᵉ Cahier, p. 188. — GOURSAT, *A. E. N.*, 1889, p. 10. — PAINLEVÉ, *loc. cit.*, p. 9.

(²) Quand deux fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point, ont chacune en ce point une singularité *isolée*, il ne peut y avoir entre elles de relation algébrique dont *le genre surpasse l'unité* (PICARD, *B. D.*, 1883, p. 107; *A. M.*, t. XI, p. 1). Dès lors, la considération des fonctions *méromorphes*, qui suffisait à la représentation paramétrique des courbes de genre 0 ou 1, ne pouvait conduire, quelles que fussent les fonctions méromorphes choisies, à une solution du même problème pour les courbes de genre supérieur. Les fonctions *uniformes* introduites par MM. Poincaré et Klein ont à distance finie des singularités *non isolées;* il est néanmoins impossible, d'après ce qui précède, d'en trouver de plus simples pour exprimer les coordonnées d'une courbe algébrique de genre quelconque.

une relation $x = \varphi(\tau)$ établissant une correspondance biunivoque et conforme entre les régions de la surface de Riemann x, relative à la fonction *algébrique* y, où cette fonction est régulière, et une région fondamentale du plan τ (1).

L'extension de ce théorème capital à des relations *analytiques* quelconques entre deux variables est-elle possible? Ainsi, soit y une fonction de x analytique non uniforme : peut-on lui faire correspondre une surface x de Riemann sur laquelle y soit analytique, et ensuite représenter cette surface d'une manière biunivoque et conforme sur un domaine simplement connexe d'un plan τ? S'il en est ainsi, on saura exprimer x et y par des fonctions *uniformes* d'un paramètre τ : les fonctions analytiques non uniformes seront ramenées, à un certain point de vue, aux fonctions uniformes.

Déjà, dans des cas particuliers, nous avons donné le moyen de former la surface de Riemann et d'obtenir la représentation dont on vient de parler. Par exemple, soit y une fonction analytique, à un nombre fini ou infini de branches, ayant seulement deux points singuliers (on ne diminue pas la généralité en supposant que ces points soient o et l'∞). La surface de Riemann x correspondante est composée de feuillets, en nombre limité ou illimité, que l'on peut considérer comme soudés le long de la coupure $(0, \infty)$. Suivant que la fonction y a m déterminations ou en a une infinité, l'une des transformations $x = \tau^m$, $x = e^\tau$ fait correspondre à cette surface x, d'une manière biunivoque et conforme, le plan τ (Ire Partie, p. 77 et 173); on saura donc représenter x et y par des fonctions analytiques uniformes de τ.

La solution du problème général est encore due à M. Poincaré. Il l'a obtenue en suivant une marche bien différente de celle qui lui avait réussi dans la question analogue relative aux fonctions algébriques. Car cette fois il s'appuie sur le principe de Dirichlet, et se sert des fonctions de Green (2). Précisons ces résultats.

---

(1) *Cf.* POINCARE, *C. R.*, 1881; *A. M.*, t. I; *M. A.*, t. XIX. — KLEIN, *M. A.*, t. XXI.

Réciproquement, il existe une relation algébrique entre deux fonctions fuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien (*A. M.*, t. I, p. 228).

(2) POINCARÉ, *B. S. M.*, 1883, p. 112. — M. Osgood a précisé quelques-uns des résultats obtenus par M. Poincaré (*B. of the American M. S.*, 1898, p. 69; *Transactions of the American M. S.*, 1900, p. 314).

Nous appellerons $\mathfrak{D}$ le domaine analytique qui correspond à la fonction analytique multiforme arbitraire donnée $y = f(x)$, c'est-à-dire le domaine formé par l'ensemble des points analytiques (x, y) définis par cette relation.

THÉORÈME. — *Au domaine analytique* $\mathfrak{D}$ *on peut associer deux fonctions* $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ *analytiques et* UNIFORMES *dans un domaine plan déterminé correspondant* $\mathfrak{T}$. *Réciproquement, à tout point* (x, y) *de* $\mathfrak{D}$ (abstraction faite des points de ramification, et peut-être aussi d'une infinité de points isolés) [1] *correspond un seul point* τ *d'un domaine convenable* $\mathfrak{T}$.

Ainsi, le domaine analytique $\mathfrak{D}$ étant donné, on peut déterminer un domaine plan $\mathfrak{T}$ de façon qu'à un point τ_0 arbitraire de $\mathfrak{T}$ corresponde un seul point (x_0, y_0) de $\mathfrak{D}$, et que le voisinage de ce point soit représenté d'une manière conforme sur le voisinage de τ_0.

Réciproquement, à tout point (x_0, y_0) de $\mathfrak{D}$ peuvent correspondre plusieurs points du plan τ; mais il existe une région fondamentale $\mathfrak{T}$ n'en renfermant qu'un seul à son intérieur [2]. Nous supposerons, comme on peut toujours le faire (p. 269), que le domaine $\mathfrak{T}$ est intérieur au cercle décrit de l'origine avec l'unité pour rayon, ou bien qu'il coïncide avec ce cercle.

On peut séparer en deux parties l'exposé de la preuve donnée par M. Poincaré.

1° *Formation de la surface de Riemann correspondant au domaine analytique* $\mathfrak{D}$ *et détermination d'une suite de contours fermés* C_n *tracés sur cette surface.*

Soit $\mathfrak{P}(x - x_0)$ l'élément initial qui détermine la fonction analytique multiforme $f(x)$. La surface de Riemann correspondant

---

(1) Est-il possible de supprimer la restriction ci-dessus, de manière à obtenir une représentation de l'ensemble de *tous* les points où la fonction analytique donnée est régulière, en faisant parcourir à τ le domaine où la fonction $\varphi(\tau)$ est régulière? La démonstration de M. Poincaré semblerait conduire à une réponse négative; mais c'est une question, d'un très grand intérêt du reste, qui est encore à éclaircir (*cf.* HILBERT, *Problèmes mathématiques;* Congrès des Mathématiciens tenu en 1900, p. 105).

(2) Par suite, comme on l'a dit plus haut (p. 8 et 12), la dérivée $\varphi'(\tau)$ ne doit s'annuler en aucun point intérieur au domaine $\mathfrak{T}$.

à cette fonction sera définie, si l'on fixe à quelles conditions le point initial et le point final des contours fermés tracés dans le plan, partant d'un point quelconque x et y revenant, appartiennent au même feuillet et dès lors correspondent à des contours fermés sur la surface.

Pour y parvenir, ajoutons aux points singuliers de $f(x)$ *trois points arbitraires* que l'on regardera comme singuliers sur tous les feuillets (leur raison d'être sera expliquée plus loin) et appelons tous ces points *points exceptionnels*. Puis, divisons en deux classes les contours fermés partant de x et ne traversant aucun point exceptionnel. La première classe sera composée de ceux que des déformations continues, s'effectuant sans que l'on traverse de point exceptionnel, peuvent ramener à avoir une longueur aussi petite que l'on veut. La seconde classe renfermera tous les autres contours. On convient que *le point de départ et le point d'arrivée sur un contour appartiennent ou non au même feuillet, suivant que le contour est de la première ou de la seconde classe.*

La surface de Riemann x ainsi définie est simplement connexe (Ire Partie, p. 11); elle a une infinité de feuillets qui s'échangent par la rotation autour de chaque point singulier. La fonction y est bien déterminée le long de tout chemin partant du centre x_0 de l'élément $\mathfrak{P}$ et ne traversant aucun point exceptionnel; elle est régulière en chaque point de la surface x [1]. De plus l'intégrale $\int_{x_0}^{x} y\,dx$ est uniforme sur cette surface; car tout contour fermé tracé sur la surface x peut être ramené, par déformation continue s'effectuant sans que l'on rencontre de point singulier, à avoir une longueur aussi petite que l'on veut, puisque cette surface est simplement connexe.

Pour la même raison, on peut tracer à son intérieur une infinité de contours fermés C enveloppant le point x_0, s'enveloppant mutuellement, et tels qu'il passe un contour C et un seul par chaque point de la surface x autre que le point x_0. Par exemple, soit γ une circonférence concentrique au cercle de convergence γ_0 de l'élément $\mathfrak{P}(x - x_0)$ et intérieure à ce cercle. Des différents points

[1] On convient que les points exceptionnels font partie, non pas de la surface de Riemann, mais de sa frontière.

de γ, décrivons des cercles γ' assez petits pour que la fonction y reste holomorphe dans ces cercles et sur leurs circonférences : soit γ_1 leur enveloppe. Des divers points de γ_1 décrivons des cercles γ'' définis comme les cercles γ' : soit γ_2 leur enveloppe. Et ainsi de suite. On peut prendre comme contours C d'abord une infinité de circonférences intérieures et concentriques à γ, ensuite une infinité de courbes enveloppant γ, s'enveloppant mutuellement et recouvrant successivement les régions annulaires comprises entre γ et γ_1, puis les régions comprises entre γ_1 et γ_2, etc.

Nous ferons choix, parmi ces contours C, d'une infinité de contours $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ tels que C_{n+1} enveloppe C_n et que tout point de la surface x soit intérieur à l'un des contours C_n [1].

2° *Formation de la relation qui définit la représentation cherchée.*

Déterminons maintenant une fonction harmonique $u(\xi, \eta)$ telle que, si on lui associe la fonction harmonique complémentaire $v(\xi, \eta)$ et si l'on pose $x = \xi + i\eta$, la relation

$$\tau = e^{-(u+iv)}$$

établisse une correspondance biunivoque et conforme entre la surface x de Riemann que nous venons de former et un domaine simplement connexe $\mathfrak{G}$ du plan τ, ne sortant pas du cercle ayant l'origine comme centre et l'unité pour rayon.

Le problème de Dirichlet permet d'associer respectivement à chacun des contours $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ des fonctions $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ analogues aux *fonctions de Green* relatives aux aires limitées par ces contours et au pôle x_0 ; nous les définirons en leur imposant d'être harmoniques à l'intérieur de ces aires, sauf au pôle x_0 où elles deviendront *logarithmiquement infinies* [c'est-à-dire que $u_n + \log\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$ restera holo-

(1) La considération des éléments qui prolongent la série initiale $\mathfrak{P}$ et ont pour centres les points de $\gamma, \gamma_1, \ldots$ *à coordonnées rationnelles* a permis à M. Osgood de préciser la marche à suivre pour construire les contours C_n de façon qu'ils jouissent des propriétés énoncées (*B. of the American M. S.*, 1898, p. 72).

morphe dans le voisinage de ξ_0, η_0], et d'être nulles le long de leurs frontières $C_1, \ldots, C_n, \ldots$.

De ces fonctions déduisons une nouvelle fonction u déterminée par l'égalité

$$u = \lim_{n=\infty} u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + \ldots.$$

Cette fonction u *existe :* car chaque élément u_n est positif à l'intérieur de C_n puisque la fonction harmonique u_n est nulle sur C_n et holomorphe ou logarithmiquement infinie dans C_n (p. 251); il croît avec n puisque la différence $u_{n+1} - u_n$ positive sur C_n est aussi positive à l'intérieur de C_n; enfin il ne dépasse pas une grandeur fixe ([1]).

Cette fonction u est *continue;* elle converge *uniformément* dans tout domaine intérieur à la surface x, elle jouit des mêmes propriétés que les fonctions u_n : par suite, elle est *harmonique* dans ce domaine, sauf au pôle x_0 où elle devient logarithmiquement infinie ([2]).

Désignons par $v_1, \ldots, v_n, \ldots, v$ les fonctions harmoniques complémentaires des fonctions $u_1, \ldots, u_n, \ldots, u$, et déterminons les constantes qui figurent dans leur expression de façon que ces fonctions s'annulent en un point x_1 de la surface x autre que le point x_0. Dès lors, on pourra poser

$$v_n = \int_{x_1}^{x} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u_n}{\partial \eta} d\xi \right), \qquad v = \int_{x_1}^{x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi \right).$$

Remarquons que les périodes de ces intégrales, c'est-à-dire leurs valeurs le long d'un chemin fermé entourant une fois le point x_0, sont égales à 2π; aussi les fonctions v_n et v ne sont déterminées qu'à un multiple près 2π.

---

(1) C'est pour prouver que $|u_n|$ est limité, et par suite que la série u converge, que les points a, b, c ont été introduits plus haut; car M. Poincaré y parvient en faisant usage d'une fonction modulaire ayant comme points singuliers ces trois points (nous n'avons pas encore fait la théorie des fonctions modulaires; aussi nous ne pouvons établir maintenant cette convergence).

La fonction analytique y, bien que régulière en ces trois points, n'est pas représentable sur le plan τ dans un domaine les renfermant à son intérieur.

(2) La continuité et la convergence uniforme de la série u sont faciles à etablir (*cf.* Poincaré, *loc. cit.*, p. 117).

De même que la fonction u est la limite des fonctions u_n, de même la fonction v est la limite des fonctions v_n; comme la fonction u, elle converge uniformément [1].

Les fonctions u_n, v_n, u, v étant ainsi formées, introduisons les fonctions

$$\tau_n = e^{-(u_n+iv_n)}, \qquad \tau = e^{-(u+iv)};$$

je dis que cette dernière relation établit entre la surface x et le plan τ une correspondance qui jouit des propriétés énoncées.

En effet, bien que les intégrales v_n et v soit multiformes, les exponentielles τ_n et τ sont uniformes, à cause de leur périodicité. Donc *à un point x correspond un seul point τ.*

Réciproquement, x est une fonction uniforme de τ, en d'autres termes il existe sur la surface x un seul point correspondant à un point donné d'affixe θ du domaine $\mathfrak{T}$.

Pour l'établir, on remarque d'abord que la fonction τ_n ne peut prendre qu'*en un seul point x* intérieur au contour C_n la valeur θ. En effet, à cette valeur θ de τ_n correspondent, il est vrai, une infinité de nombres v_n en progression arithmétique de raison 2π; mais, d'autre part, d'après la remarque relative à la périodicité de v_n, la limite supérieure x de l'intégrale v_n ne change pas quand v_n varie de 2π. Comme conséquence, l'intégrale $\int \frac{d\tau_n}{dx}\frac{dx}{\tau_n-\theta}$ a la valeur 0 ou la valeur $2i\pi$, le long d'un contour fermé simple *intérieur* à C_n, suivant que ce contour renferme ou non à son intérieur le point x où la fonction τ_n prend la valeur θ, car le résidu de la fonction $\frac{d\tau_n}{dx}\frac{1}{\tau_n-\theta}$ relatif à ce pôle x est égal à 1.

Quant à la fonction τ, supposons qu'elle prenne la valeur θ en deux points x' et x'' de la surface x; désignons par Γ un contour fermé ayant à son intérieur ces deux points, et ne contenant ni le

---

[1] Cela résulte immédiatement de ce que l'on peut prendre n assez grand pour que $\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right|$ soient inférieurs à tout nombre donné α, d'où il suit que $|v-v_n|$ est lui-même inférieur à $2\alpha L$, L désignant le plus grand chemin qu'il faut parcourir sur la surface de Riemann pour aller de x_1 en x. On l'établit aisément en divisant le domaine en un nombre fini de régions partielles assez petites pour que, dans chacune d'elles, certaines inégalités soient satisfaites (*cf.* Poincaré, *loc. cit.*, p. 121).

point x_0, ni aucun point (autre que x' et x'') où la fonction τ prenne la valeur θ. D'après ces hypothèses, le théorème des résidus donne

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{dx}\frac{dx}{\tau-\theta} = 4i\pi.$$

Or, c'est un résultat impossible. En effet, posons

$$u_n + iv_n = w_n(x), \qquad u + iv = w(x),$$

ce qui donne

$$\tau_n = e^{-w_n}, \qquad \tau = e^{-w}, \qquad \frac{d\tau_n}{dx} = -e^{-w_n}\frac{dw_n}{dx}, \qquad \frac{d\tau}{dx} = -e^{-w}\frac{dw}{dx}.$$

Puisque u_n et v_n ont comme limites u et v, on peut choisir n assez grand pour que l'on ait, dans le domaine de frontière Γ,

$$|\tau - \tau_n| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{dw}{dx} - \frac{dw_n}{dx}\right| < \varepsilon',$$

ε et ε' désignant deux nombres positifs arbitraires (¹). De plus, quand le point x décrit le contour Γ, $\left|\frac{dw}{dx}\right|$ a une limite supérieure L, et $|\tau-\theta|$ a une limite inférieure l; $\left|1-\frac{\theta}{\tau}\right|$ surpasse aussi ce nombre l puisque $|\tau|$ reste inférieur à 1 dans le domaine $\mathfrak{E}$. Par suite, à cause de l'identité

$$\frac{\frac{d\tau}{dx}}{\tau-\theta} - \frac{\frac{d\tau_n}{dx}}{\tau_n-\theta} = \frac{\frac{dw_n}{dx} - \frac{dw}{dx}}{1-\frac{\theta}{\tau}} + \theta\frac{dw_n}{dx}\frac{\tau-\tau_n}{(\tau-\theta)(\tau_n-\theta)},$$

on a sur le contour Γ, en prenant n suffisamment grand,

$$\left|\frac{\frac{d\tau}{dx}}{\tau-\theta} - \frac{\frac{d\tau_n}{dx}}{\tau_n-\theta}\right| < \frac{\varepsilon'}{l} + |\theta(\mathrm{L}+\varepsilon')|\frac{\varepsilon}{l(l-\varepsilon)}.$$

Appelons ε'' le second membre de cette inégalité; on aura donc, en

(¹) La première inégalité est évidente. La seconde résulte des remarques faites dans la note précédente, puisque les fonctions $u+iv$, u_n+iv_n sont analytiques.

désignant par Γ la longueur du contour Γ,

$$\left|\int_{\Gamma}\left(\frac{\frac{d\tau}{dx}}{\tau-\theta}-\frac{\frac{d\tau_n}{dx}}{\tau_n-\theta}\right)dx\right|<\varepsilon''\Gamma.$$

Si n a été choisi assez grand pour que le contour C_n enveloppe Γ, le premier membre de cette inégalité représente le module de la différence de deux intégrales ayant pour valeurs l'une $4i\pi$, l'autre $2i\pi$ ou 0; le second membre est aussi petit que l'on veut à cause du facteur ε''. Cette inégalité est donc absurde.

Ainsi, *à une valeur de* τ *intérieure au domaine* $\mathfrak{T}$ *correspond un seul point intérieur à la surface* x : la variable x est une fonction analytique uniforme de τ. Il en est de même de la fonction y, puisqu'à un point de la surface x correspond une seule valeur de y.

§ IV. — Les fonctions analytiques et les surfaces minima.

330. Nous nous contenterons de montrer comment Weierstrass a rattaché la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe à celle des *surfaces minima* [1]. Rappelons d'abord la définition de ces surfaces.

Pour que l'aire d'une portion continue de surface, limitée par un contour donné, soit minimum, *il faut* que ses rayons de courbure principaux soient en chaque point égaux et de signes contraires. Cette condition n'est pas toujours suffisante : néanmoins on convient d'appeler *surfaces minima* toutes celles qui jouissent de cette propriété; en d'autres termes, *les surfaces minima sont celles qui ont pour indicatrice, en chacun de leurs points, une hyperbole équilatère* [2].

---

[1] Weierstrass, *Monatsber. d. Berliner Ak.*, 1866 et 1867. — *Cf.* aussi Darboux, *Théorie des surfaces*, Ire Partie, Livre III, Chapitre II.

[2] Les surfaces minima rentrent ainsi, comme cas particulier, dans les surfaces dites de M. Weingarten ou surfaces (W), c'est-à-dire dans celles qui ont leurs rayons de courbure principaux liés par une équation donnée *a priori*.

Il résulte immédiatement des formules (3) (p. 287) que ce sont aussi des *surfaces de translation*, au sens de Lie : elles peuvent être engendrées par la translation des *lignes de longueur nulle* tracées sur la surface.

Il suit de là que l'on peut aussi caractériser ces surfaces en disant que *les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface y forment un réseau conjugué.*

En effet, en un point de la surface, les tangentes aux lignes de longueur nulle passant par ce point ont pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$, quand on prend comme axes de coordonnées les axes de l'indicatrice, puisque leurs équations s'obtiennent en égalant à zéro le carré d'un élément linéaire qui a alors la forme

$$(du + i\,dv)(du - i\,dv).$$

Or, la conique et la seule conique admettant pour diamètres conjugués des droites de coefficients angulaires $+i$ et $-i$ est l'hyperbole équilatère. Donc, il faut et il suffit que l'indicatrice d'une surface soit en chaque point une hyperbole équilatère pour que les lignes de longueur nulle y déterminent un réseau conjugué.

Appuyons-nous sur cette propriété des surfaces minima pour établir leur équation : nous allons chercher à exprimer les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point d'une pareille surface en fonction de paramètres α et β choisis de telle sorte qu'ils correspondent aux systèmes de lignes de longueur nulle.

Le réseau (α, β) *est conjugué.* Or, pour qu'un réseau soit conjugué, il faut et il suffit que les coordonnées x, y, z satisfassent à une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, que l'on peut ramener à la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B\frac{\partial\theta}{\partial\beta},$$

A et B désignant des fonctions quelconques de α et β. On aura donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= A\frac{\partial x}{\partial\alpha} + B\frac{\partial x}{\partial\beta},\\ \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= A\frac{\partial y}{\partial\alpha} + B\frac{\partial y}{\partial\beta},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= A\frac{\partial z}{\partial\alpha} + B\frac{\partial z}{\partial\beta}.\end{aligned}\right.$$

Le réseau (α, β) *est formé de lignes de longueur nulle.* Dès

lors, dans la forme quadratique qui représente le carré de l'élément linéaire de la surface, les coefficients E et G sont nuls; on aura donc

$$(2)\quad \begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \\ G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre le système formé par les équations (1) et (2), différentions la première des relations (2) par rapport à β, et la seconde par rapport à α; puis, remplaçons les dérivées secondes par leurs valeurs tirées des équations (1). On en déduit

$$AF = 0, \qquad BF = 0 \qquad \left(F = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right);$$

par suite A et B sont nuls, car F est différent de zéro, puisque toute ligne tracée sur la surface n'est pas de longueur nulle.

Les équations (1) deviennent donc

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0,$$

et leurs intégrales sont de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} x = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \\ y = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta), \\ z = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta). \end{cases}$$

Pour que ces relations représentent les équations des surfaces minima, il faut déterminer les fonctions $f_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_3$ de façon que x, y, z satisfassent encore aux équations (2), c'est-à-dire de manière que l'on ait

$$(4)\quad \begin{cases} f_1'^2(\alpha) + f_2'^2(\alpha) + f_3'^2(\alpha) = 0, \\ \varphi_1'^2(\beta) + \varphi_2'^2(\beta) + \varphi_3'^2(\beta) = 0. \end{cases}$$

Enneper et Weierstrass introduisent la première de ces conditions dans les équations (3) en posant

$$\frac{f_1'(\alpha) + i f_2'(\alpha)}{-f_3'(\alpha)} = u,$$

ce qui donne, à cause de la première des équations (4),

$$\frac{f'_1(\alpha)-i f'_2(\alpha)}{f'_3(\alpha)}=\frac{1}{u},$$

et par suite

$$\frac{f'_1(\alpha)}{1-u^2}=\frac{f'_2(\alpha)}{i(1+u^2)}=\frac{f'_3(\alpha)}{2u}.$$

Représentons la valeur de ces trois rapports par $\frac{\mathfrak{F}(u)}{2}\frac{du}{d\alpha}$; on en déduit

$$f_1(\alpha)=\frac{1}{2}\int(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du,$$

$$f_2(\alpha)=\frac{i}{2}\int(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du,$$

$$f_3(\alpha)=\int u\quad\mathfrak{F}(u)\,du.$$

La même méthode conduit à des expressions analogues pour $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$, $\varphi_3(\beta)$; il suffit de poser

$$\frac{\varphi'_1(\beta)-i\varphi'_2(\beta)}{-\varphi'_3(\beta)}=v,$$

et d'introduire une fonction $\mathcal{G}(v)$ analogue à $\mathfrak{F}(u)$. Donc les coordonnées des points de toute surface minima pourront s'exprimer en coordonnées paramétriques (u, v) par les formules

$$(5)\quad\begin{cases} x=\frac{1}{2}\int(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du+\frac{1}{2}\int(1-v^2)\mathcal{G}(v)\,dv,\\ y=\frac{i}{2}\int(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du-\frac{i}{2}\int(1+v^2)\mathcal{G}(v)\,dv,\\ z=\int u\quad\mathfrak{F}(u)\,du+\int v\quad\mathcal{G}(v)\,dv.\end{cases}$$

Une condition évidemment suffisante pour que ces surfaces soient réelles, c'est que les fonctions $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$ soient imaginaires conjuguées et que les intégrales relatives à u et v soient prises suivant des chemins imaginaires conjugués (¹).

(¹) On peut montrer que ces conditions suffisantes sont aussi *nécessaires* (*cf.* DARBOUX, *loc. cit.*, p. 292).

Ainsi les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\displaystyle\int (1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du, \\ y = \mathcal{R}\displaystyle\int i(1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du, \\ z = \mathcal{R}\displaystyle\int 2u\,\mathcal{F}(u)\,du \end{cases}$$

représentent des nappes réelles de surfaces minima ([1]).

Ces remarques font apparaître le lien entre la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe et celle des surfaces minima.

En effet :

1° A toute fonction de variable complexe, $\mathcal{F}(u)$, correspond une surface minima, représentée par les équations (6) : cette surface est définie de forme et d'orientation, puisque ces équations déterminent x, y, z à des constantes additives près, dont la variation ne fera qu'imprimer un mouvement de translation à la surface.

2° Réciproquement, à une surface minima donnée, correspond au moins une fonction de variable complexe ([2]), puisque les équations de cette surface peuvent toujours être mises sous les formes (5) et (6).

Ainsi, les relations analytiques auxquelles une fonction de variable complexe donne naissance auront pour représentation géométrique des propriétés des surfaces minima, et réciproquement.

([1]) Comme nous l'avons fait plusieurs fois (Ire Partie, p. 231), nous désignons avec Weierstrass par le symbole $\mathcal{R}$ la partie réelle d'une grandeur complexe.

Dans les formules (6), les deux coordonnées paramétriques sont figurées par la partie réelle et la partie imaginaire de u.

([2]) On démontre qu'à une surface minima réelle correspondent *deux* fonctions de la forme $\mathcal{F}(u)$, $-\frac{1}{u^4}\mathcal{G}\left(-\frac{1}{u}\right)$ ($\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ désignant des fonctions imaginaires conjuguées), qui sont *différentes*, à moins qu'il ne s'agisse d'une surface *double* (*cf.* Darboux, *loc. cit.*, p. 295 et 359).

§ V. — Les fonctions analytiques, la mécanique et la physique.

331. Chaque élément u, v d'une fonction analytique $u+iv$ est harmonique. Par là, tout problème qui exige l'introduction d'un potentiel (et ces problèmes sont innombrables en Mécanique comme en Physique) se rattache à la Théorie des fonctions analytiques (¹).

Il y a plus : non seulement, dans ces sciences, les fonctions harmoniques s'imposent; mais on est amené à considérer simultanément des fonctions harmoniques *complémentaires*. C'est ainsi que la Mécanique conduit à l'étude des *courbes de niveau* ou équipotentielles et de leurs trajectoires orthogonales ou *lignes de force* (²), et que ces lignes sont définies par des équations

$$u(x, y) = \text{const.},$$
$$v(x, y) = \text{const.},$$

telles que la combinaison $u+iv$ soit analytique.

Sans entrer ici dans des détails du domaine de la Mécanique ou de la Physique (³), donnons quelques exemples et occuponsnous d'abord de l'*attraction en raison inverse de la distance*.

Soient dans un plan n points matériels fixes (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) exerçant sur un point mobile (x, y) des actions en raison

---

(¹) « On peut résumer les procédés de Riemann en disant qu'*il fait l'application, à ces parties de fonction* (*u* et *v*), *des théorèmes fondamentaux de la Théorie du potentiel*. Son point de départ se trouve ainsi dans la Physique mathématique » [Klein, *Riemann et son influence sur les mathématiques modernes* (*Œuvres de Riemann*, trad. Laugel, p. XVIII)].

(²) La dénomination de *lignes de force*, due à Faraday, tient à ce que les tangentes à ces lignes font connaître la direction de la force.

(³) *Cf.* Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*. — Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme* (traduction). — Poincaré, Cours de la Faculté des Sciences (Électricité, Tourbillons, etc.). — Duhem, Divers Ouvrages. — Etc.

Voici un exemple emprunté à la Théorie des mouvements tourbillonnaires, l'une des plus importantes parmi celles de l'Hydrodynamique :

Soient x, y, z les coordonnées au temps t d'une molécule fluide; ξ, η, ζ les composantes de sa vitesse. Helmholtz a appelé *tourbillon* le vecteur qui a pour

inverse des distances $r_1, \ldots, r_n$ du point mobile à chacun des points fixes. Le potentiel correspondant u a comme expression

$$u = \sum_l m_l \log \frac{1}{r_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

$m_1, \ldots, m_n$ désignant des coefficients constants.

Posons

$$x + iy = z, \qquad a_l + ib_l = c_l, \qquad z - c_l = r_l e^{i\theta_l};$$

r_l et θ_l représenteront les coordonnées polaires du point (x, y), en supposant l'origine placée au point (a_l, b_l).

Pour obtenir l'équation des courbes de niveau et des lignes de force, dans le mouvement du point (x, y) sous l'action des forces définies plus haut, il n'y a qu'à considérer la fonction analytique

$$f(z) = \sum_l m_l \log \frac{1}{z - c_l},$$

à la mettre sous la forme $u + iv$, et à égaler à des constantes les fonctions u et v. On a ainsi

$$u = -m_1 \log r_1 - \ldots - m_n \log r_n, \qquad v = -m_1\theta_1 - \ldots - m_n\theta_n.$$

De là, une définition géométrique élégante des courbes de niveau et des lignes de force : ce sont respectivement des cassinoïdes à n foyers et des lignes telles que les vecteurs obtenus en joignant

---

composantes
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right),$$
et ***lignes de tourbillon*** celles qui sont tangentes en chacun de leurs points au vecteur tourbillon : puis il a cherché à déduire les composantes de la vitesse d'une molécule de celles du tourbillon, sachant que ces composantes vérifient une certaine équation aux dérivées partielles $\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$. C'est le ***problème d'Helmholtz***.

Lorsque la vitesse reste parallèle à un plan (en pareil cas, les lignes de tourbillon sont des droites normales à ce plan, si la vitesse est la même en tous les points situés sur une même perpendiculaire à ce plan), ce problème se rattache à la ***représentation conforme,*** et dès lors aux fonctions analytiques; car si l'on sait représenter d'une manière conforme sur un cercle la section du vase où se meut le fluide, on peut résoudre le problème de Helmholtz, et réciproquement (*voir* Poincaré, *Théorie des tourbillons,* p. 99, 1893).

les n foyers à un point quelconque de ces lignes forment avec une direction fixe des angles dont la somme, après l'introduction de facteurs convenables, soit constante [1].

332. Une interprétation physique intéressante des fonctions analytiques résulte de l'étude des mouvements irrotationnels et permanents [2] de certains fluides, dans le cas où les vitesses de tous leurs éléments restent parallèles à un plan fixe et sont identiques en tous les points situés sur une même perpendiculaire à ce plan.

Considérons par exemple un liquide incompressible à température constante animé d'un tel mouvement. Soient x et y les coordonnées d'une de ses molécules par rapport à deux axes rectangulaires situés dans le plan où elle se meut, $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ les composantes de sa vitesse, $u(x, y)$ la fonction dont elles sont les dérivées (Helmholtz l'a appelée *potentiel des vitesses*).

1° *Les lignes équipotentielles* $u(x, y) =$ const. *sont normales aux trajectoires des molécules.*

En effet, on a par hypothèse

$$\xi(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \eta(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

---

(1) On peut donner de cette même fonction analytique $f(z)$ des interprétations hydrodynamiques, électrodynamiques, électrostatiques. *Cf.* Poincaré, *Théorie des tourbillons*, p. 67.

(2) Le mouvement d'un fluide est *irrotationnel* ou *non tourbillonnaire* lorsque les composantes (ξ, η, ζ) de la vitesse de chacun de ses éléments sont les dérivées d'une même fonction $u(x, y, z, t)$.

Un mouvement ou un *régime* est *permanent* lorsque la distribution des vitesses, des pressions (p) et des densités (ρ), aux divers points géométriques de l'espace occupé par le fluide, est toujours la même; en d'autres termes, *lorsque* ξ, η, ζ, p, ρ *ne dépendent pas explicitement du temps* t, mais seulement des variables x, y, z d'Euler, c'est-à-dire des coordonnées au temps t d'une molécule fluide que l'on suit dans son mouvement.

Quand un mouvement est *irrotationnel et permanent*, la fonction u ne renferme pas t.

Enfin, si le milieu en mouvement est un liquide incompressible à température constante, la densité ρ est aussi constante.

Cf. Appell, *Mécanique*, t. III.

et dès lors, en désignant par dx et dy les différentielles dans les déplacements sur une ligne équipotentielle,

$$du = \xi\, dx + \eta\, dy.$$

Dans un pareil déplacement, du est nul, puisque u est constant; par suite les directions (ξ, η), (dx, dy) sont bien rectangulaires.

2° *Le potentiel des vitesses $u(x, y)$ est une fonction harmonique.*

Cette propriété de la fonction u se déduit immédiatement de l'équation connue en Hydrodynamique sous le nom d'*équation de continuité* (¹).

Voici un raisonnement direct pour l'établir.

Le fluide est incompressible; donc l'aire du triangle déterminé par trois molécules situées à des distances infiniment petites les unes des autres est la même aux temps t et $t + dt$. Or les trois points qui, au temps t, ont pour coordonnées

$$(x, y), \quad (x + dx, y), \quad (x, y + dy),$$

auront pour coordonnées au temps $t + dt$,

$$x + \xi\, dt, \quad y + \eta\, dt,$$

$$x + dx + \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right) dt, \quad y + \eta\, dt,$$

$$x + \xi\, dt, \quad y + dy + \left(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dt.$$

Par suite, en vertu de la formule qui donne l'expression de

(¹) L'*équation de continuité* exprime l'absence de vide au sein de la masse fluide : on l'obtient en écrivant que la masse d'un élément infiniment petit du milieu est la même avant et après sa déformation. Dans le système d'Euler, c'est-à-dire en prenant comme variables le temps t et les coordonnées x, y, z définies dans la note précédente, cette équation bien connue s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial z} = 0.$$

Dès lors, il n'y a qu'à se reporter à la définition de ξ et η pour vérifier que la fonction u est harmonique, quand la densité ρ est constante.

l'aire d'un triangle, les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+dx & x \\ y & y & y+dy \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+\xi\,dt & x+dx+\left(\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}dx\right)dt & x+\xi\,dt \\ y+\eta\,dt & y+\eta\,dt & y+dy+\left(\eta+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy\right)dt \end{vmatrix}$$

sont identiques. On en calcule aisément les valeurs respectives en retranchant terme à terme les éléments de la première et de la seconde colonne; en égalant les résultats obtenus il vient

$$dx\,dy\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dt = 0,$$

et, par suite, on a bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dans le cas que nous considérons, la fonction $v(x, y)$ complémentaire du potentiel $u(x, y)$ s'appelle *fonction d'écoulement* (Maxwell) ou *fonction de courant :* les courbes $v(x, y) = \text{const.}$ représentent les trajectoires des molécules (p. 292); ces trajectoires portent aussi les noms de *filets fluides* et de *lignes de courants* (¹), et elles correspondent aux *tubes de forces* et aux lignes de force.

Ainsi tout mouvement plan d'un fluide incompressible conduit à l'étude d'une fonction analytique.

Réciproquement, à toute fonction harmonique $u(x, y)$, et par suite à toute fonction analytique, on peut faire correspondre un mouvement irrotationnel plan d'un liquide incompressible. Pour

---

(¹) En général, les lignes de courant sont celles qui ont pour tangente, en chacun de leur point, le vecteur représentant la vitesse : leurs équations différentielles sont donc

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Ce ne sont les trajectoires des molécules que dans le cas d'un régime permanent.

s'en assurer, il n'y a qu'à reprendre en ordre inverse les calculs ci-dessus.

A cette interprétation *hydrodynamique* des fonctions analytiques, on peut substituer une interprétation *électrique*, par exemple en considérant les courants qui proviennent d'électricité en mouvement permanent sur une plaque conductrice.

En effet, en écrivant que l'électricité ne s'accumule sur aucun élément de la plaque et qu'elle va d'un point à un autre d'un mouvement continu, c'est-à-dire en traversant toute la région intermédiaire, on voit que les composantes ξ, η de la vitesse d'une molécule quelconque satisfont à l'équation (1),

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \qquad \left(\xi = \frac{\partial u}{\partial x}, \eta = \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

et par suite que *la fonction u est harmonique*.

Cela posé, soit un fluide en mouvement dans les conditions définies ci-dessus. Égalons à des constantes le potentiel des vitesses $u(x, y)$ qui correspond à ce mouvement, et la fonction harmonique complémentaire ou fonction de courant $v(x, y)$: les équations obtenues définissent des lignes analogues aux lignes de niveau, et les trajectoires des molécules fluides. Or la combinaison $u + iv$ est analytique. Donc l'étude de certains mouvements plans de fluides électriques se rattache à celle des fonctions analytiques.

Il y a du reste bien des manières de réaliser matériellement, dans les diverses branches de la Physique, de pareils mouvements de molécules : il suffit, par exemple, de provoquer des courants électriques dans des plaques conductrices, soit au moyen d'une pile, soit par l'induction électrique ou magnétique. Ainsi la Physique amène à considérer effectivement des fonctions analytiques.

Inversement, à toute fonction analytique correspondent une famille de lignes équipotentielles et une famille de lignes ortho-

---

(1) Cette équation est souvent appelée elle aussi *équation de continuité*, comme l'équation correspondante en hydrodynamique. *Cf.* MAXWELL, *Électricité et Magnétisme* (traduction), t. I, p. 470. Ici la fonction u désigne la tension électrique.

gonales que l'on peut théoriquement regarder comme les trajectoires des molécules d'un fluide. Par suite, toute fonction analytique permet de concevoir des mouvements de fluides qui sont théoriquement possibles, et conduit à la solution de problèmes physiques (¹).

333. Non seulement en Hydrodynamique et en Électrodynamique, mais aussi en Statique, les questions qui se ramènent à la recherche des fonctions harmoniques dans un domaine à deux dimensions, et dès lors à la considération des fonctions analytiques, sont nombreuses. Mentionnons, par exemple, le problème de la distribution de l'électricité sur un conducteur dans des conditions convenables (²).

Pour terminer ces remarques, qui prouvent si bien la pénétration mutuelle des diverses branches de la Science mathéma-

---

(¹) Ainsi aux fonctions analytiques $\log \frac{z-a}{z-b}$ et $i \log \frac{z-a}{z-b}$ correspondent des lignes de courant qui sont respectivement des cercles passant par a et b, et des cercles par rapport auxquels les points a et b sont conjugués. On peut réaliser expérimentalement les mouvements correspondants de fluides électriques, dans le premier cas, au moyen de courants qui entrent sur une plaque conductrice par le point a et en sortent par le point b; dans le second cas, en joignant sur cette plaque les points a et b par une courbe sans point multiple qui serait le siège d'une force électromotrice constante. *Cf.* KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen*, p. 13.

Nous avons dit plus haut (p. 226) le parti que M. Klein avait tiré de ces considérations.

Voir aussi MAXWELL, *op. cit.*, t. I, p. 336.

(²) Ainsi, soient des conducteurs dont les surfaces soient toutes de révolution autour d'axes parallèles, au moins dans la partie du champ électrique considéré, et au delà; supposons aussi que l'on puisse négliger l'action électrique du champ où cette condition n'est pas réalisée.

En ce cas, l'électricité se distribue uniformément tout le long des génératrices des conducteurs parallèles aux axes. Par suite, dans le champ limité par deux plans perpendiculaires à ces axes et suffisamment voisins, le potentiel et la distribution électrique ne dépendent que de *deux* variables. Une proposition générale (p. 53) apprend dès lors que le problème de l'équilibre électrique revient à la recherche d'une fonction harmonique $u(x, y)$.

On trouvera dans l'Ouvrage de Maxwell cité plus haut plusieurs diagrammes représentant des réseaux formés par des lignes équipotentielles et des lignes de force (*voir*, par exemple, t. I, p. 187).

Cf. aussi RIEMANN, *Œuvres*, trad., p. 378.

tique, voyons comment, dans la Théorie de la chaleur, les familles de courbes isothermes et les réseaux isothermes se trouvent encore reliés à l'étude des fonctions analytiques ([1]).

Soit une plaque homogène en équilibre de température. Par suite de cet équilibre, la température θ de l'un quelconque de ses points (x, y) ne dépend pas du temps et est seulement fonction des coordonnées de ce point. On démontre que cette fonction $\theta(x, y)$ est harmonique.

Considérons les points de la plaque dont la température est la même.

Les diverses courbes isothermes, lieux de ces points, peuvent être regardées comme définies par une équation $f(x, y) = \lambda$ renfermant un paramètre λ variable d'une courbe à l'autre : cherchons quelle doit être cette fonction $f(x, y)$ pour que les courbes correspondantes jouissent de la propriété énoncée.

Si la température $\theta(x, y)$ est la même sur l'une d'elles, la fonction θ ne dépend que de λ, c'est-à-dire de $f(x, y)$, et peut être représentée par $F[f(x, y)]$. Aussi le problème de la détermination des fonctions f définissant des isothermes exige d'abord la recherche des conditions nécessaires pour que la fonction $F[f(x, y)]$ soit harmonique, puisque la fonction $\theta(x, y)$ jouit de cette propriété.

Formons ΔF ; il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{df}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{df^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{dF}{df}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{df}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{d^2 F}{df^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{dF}{df}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Par suite, la fonction F satisfera à l'équation de Laplace, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = -\frac{\dfrac{d^2 F}{df^2}}{\dfrac{dF}{df}}.$$

Le second membre de cette relation *dépend seulement de f*, et non pas de x et y; donc *il en doit être de même du pre-*

([1]) LAMÉ, *J. M.*, 1837, p. 147. *Voir* aussi FOURIER, *Œuvres*, t. I, p. 99.

mier. Aussi, une condition nécessaire pour que la famille de courbes $f(x, y) = \lambda$ soit isotherme, c'est que le premier membre de l'équation (1) dépende seulement de f, par suite que la fonction f soit une intégrale de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \psi(f)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = 0,$$

où $\psi(f)$ désigne une fonction arbitraire [1].

Réciproquement, si la fonction f satisfait à une équation du type ci-dessus, les courbes $f(x, y) = \lambda$ forment une famille d'isothermes; en d'autres termes, une fonction convenable de $f(x, y)$ est harmonique. En effet, il n'y a qu'à mettre la fonction $\psi(f)$ sous la forme $\dfrac{\Phi'(f)}{\Phi(f)}$ pour que l'équation

$$\Phi(f)\frac{d^2 F}{df^2} + \Phi'(f)\frac{dF}{df} = 0$$

s'intègre deux fois et donne la valeur d'une fonction $F(f)$, qui sera harmonique, et par suite pourra servir à représenter la température θ le long d'une courbe $f(x, y) = \lambda$ [2].

Ces préliminaires rappelés, considérons une fonction analytique mise sous la forme $u + iv$. *Les courbes* $u =$ const. *définissent une famille d'isothermes,* puisque la fonction u est harmonique.

Pour la même raison, les courbes $v =$ const. forment une seconde famille d'isothermes.

Ainsi, le réseau (u, v) est orthogonal (Ire Partie, p. 51) et *isotherme :* donc chaque fonction analytique conduit à conce-

---

(1) Les fonctions

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ont été appelées par Lamé *paramètres différentiels* du premier et du second ordre de la fonction f. Le calcul montre immédiatement que, par exemple, ils restent invariables dans toute substitution orthogonale effectuée sur les variables.

(2) On voit que, si la condition (2) est remplie, l'équation du faisceau d'isothermes $f(x, y) = \lambda$ peut être mise sous la forme $v(x, y) = \mu$, v designant une fonction harmonique.

voir comme possible certaine répartition de lignes d'égale température.

Remarque. — Toute transformation conforme, avons-nous vu (p. 60), substitue à une fonction harmonique une fonction harmonique. Vérifions par un calcul direct qu'à une famille de courbes isothermes $f(x, y) = \lambda$, une transformation conforme

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

fait correspondre aussi une nouvelle famille d'isothermes

$$\varphi(\xi, \eta) = \lambda.$$

En effet, les paramètres différentiels de la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ ont pour expressions, puisque la fonction $x + iy$ est analytique (p. 265),

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

On en déduit

$$\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

car la dérivée de $x + iy$ n'est pas nulle, si la transformation est biunivoque et conforme.

Le dernier rapport dépend seulement, par hypothèse, de $f(x, y)$ ou de λ; donc le rapport précédent est fonction uniquement de λ ou de $\varphi(\xi, \eta)$. C'est dire que les courbes $\varphi(\xi, \eta) = \lambda$ sont isothermes.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
33963 Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
33963 Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
33963 Quai des Grands-Augustins, 55.

33963 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

